GOBIERNO DEL ESTADO DE MÉXICO | ESTADO DE MÉXICO ¡El poder de servir! | EDUCACIÓN SECRETARÍA DE EDUCACIÓN, CIENCIA, TECNOLOGÍA E INNOVACIÓN

PREPA 28

PLANEACIÓN DIDÁCTICA POR PROGRESIONES

PLANEACIÓN SEMESTRAL POR PROGRESIONES

Datos de identificación

SERVICIO EDUCATIVO:	SUBDIRECCIÓN REGIONAL:
NOMBRE DEL PLANTEL: ESCUELA PREPARATORIA OFICIAL No. 28	**SEMESTRE:** **Cuarto.**
NOMBRE DEL (LA) DOCENTE: Juan Pichardo Velázquez.	**FECHA DE ELABORACIÓN:** **20 de MAYO 2025**
UNIDAD DE APRENDIZAJE CURRICULAR: **Temas Selectos de Matemáticas I**	**PERIODO DE REGISTRO DE CALIFICACIONES** 12 de mayo al 18 de junio
LA UAC PERTENECE A: Los programas de estudio promueven el aprendizaje significativo, a través de un enfoque transversal, que invita a las y los docentes, a mirar más allá del programa de la UAC que imparten, a partir de analizar cada uno de los elementos que las conforman: aprendizajes de trayectoria, metas de aprendizaje, metas específicas y progresiones; así como de la reflexión sobre sus alcances para pensar las articulaciones con otras UAC, necesarios para la formación integral del estudiantado.	
HORAS DE MEDIACIÓN DOCENTE **4**	**NÚMERO DE SESIONES DEL SEMESTRE** **90**
FECHA DE APLICACIÓN: **12 de mayo al 18 de junio**	**PORCENTAJE DE REPROBACIÓN DE LA ASIGNATURA:**

Metodología didáctica de la UAC

ENFOQUE DE APRENDIZAJE (ACTIVO Y SITUADO)	PRINCIPALES METODOLOGÍAS Y ESTRATEGIAS DIDÁCTICAS ESPECÍFICAS DEL ÁREA O RECURSO
El currículum fundamental y el ampliado, guían la actividad del personal docente al definir las metas de aprendizaje que las y los estudiantes deberán lograr a lo largo del semestre a través de las diferentes progresiones de aprendizaje; mientras que el currículum laboral mantiene su enfoque por competencias. En los tres tipos de currículum se proponen estrategias de enseñanza, aprendizaje y evaluación que facilitarán el cumplimiento de las mismas; así como los recursos didácticos y las fuentes de información a las que tanto el estudiantado como el personal docente pueden recurrir para cumplir con las metas establecidas.	Los programas4 de estudio materializan los fines de la política educativa mexicana al promover el desarrollo integral del estudiantado, a través del Marco Curricular Común organizado en el currículum fundamental, el currículum ampliado y el currículum laboral. El currículum fundamental y el ampliado, guían la actividad del personal docente al definir las metas de aprendizaje que las y los estudiantes deberán lograr a lo largo del semestre a través de las diferentes progresiones de aprendizaje; mientras que el currículum laboral mantiene su enfoque por competencias. En los tres tipos de currículum se proponen estrategias de enseñanza, aprendizaje y evaluación que facilitarán el cumplimiento de las mismas; así como los recursos didácticos y las fuentes de información a las que tanto el estudiantado como el personal docente pueden recurrir para cumplir con las metas establecidas.

Contexto educativo: interno y externo

CONTEXTO EDUCATIVO
1. Contexto externo del plantel Interno: Matricula, se cuenta con alrededor de 430 alumnos en turno vespertino, en relación con los indicadores académicos que arroja la plataforma MIGE. Se cuenta con un edificio renovado en todas sus 9 aulas, servicio médico, auditorio, papelería, 6 pequeñas bodegas, biblioteca, sala de docentes, contabilidad, área verde, control escolar, sala de cómputo, arco techo, explanada, laboratorio multidisciplinario, área de directivos, área de orientación escolar, tutorías y terraza. Siempre limpio y ordenado. Equipamiento. En cuanto al equipamiento, se cuenta con 9 aulas con proyectores y cable HDMI, para conexión a laptop. 48 computadoras de escritorio para servicio didáctico, y 7 laptops para uso de directivos y orientación, así como 5 equipos más de escritorio. Se cuenta con 16 cámaras de seguridad, DVR y monitor, conmutador con 7 extensiones, alarma sísmica conectada al sismológico nacional con 4 bocinas, dos módems para el servicio de internet, 7 impresoras de diversas características, impresora para credenciales en PVC, equipo de primeros auxilios, camilla de emergencias, 11 extintores de diversos usos, horno de microondas. Recursos Humanos. Contamos 67 docentes en ambos turnos, todos dentro de su perfil para impartir las asignaturas asignadas, 4 personas de intendencias, 4 personas con funciones administrativas, un director, un subdirector, un secretario escolar y una pedagoga A.
2. Elementos del contexto interno del plantel Externo Ubicación: La Escuela se encuentra ubicada en la calle Oriente 8 número 248, de la colonia Reforma, Municipio de Nezahualcóyotl, código postal 57840, latitud 19.374865823585804, longitud -98.98177234240895. Entre Sur 1 y Sur 2, a una calle de la Av. Floresta y a una calle de la Av. Pantitlán. Aspectos Socioculturales: Según datos del 2020 del INEGI, en Nezahualcóyotl viven 1 millón 077 mil 208 habitantes, de los cuales 517 mil 059 son hombres y 549 mil 376 son mujeres. La esperanza de vida de la población es de 75 años, igual a la media nacional. Lo que hace un gran hacinamiento de la población. Las mayores problemáticas son la Crisis de Agua, la Inseguridad pública y los problemas de MOVILIDAD. Economía: De acuerdo con el censo económico de 2019, los sectores económicos con mayor número de unidades económicas en Nezahualcóyotl, son: Comercio al por menor 48,7 % con 22,992 unidades y los servicios de esparcimiento culturales y deportivos sólo representan el 1,43 % con 561 unidades. Es notable que se requieren más áreas verdes y eliminar el gran foco de contaminación que es el tiradero a cielo abierto del Bordo de Xochiaca.

2 A Evaluación diagnóstica del grupo

La evaluación es parte de la planeación didáctica, no como una acción al cierre de la revisión de los temas, sino como una serie de acciones que confluyen con las actividades de enseñanza y aprendizaje, ya sea de manera formal (planeadas con un propósito específico como son la aplicación de instrumentos, exposiciones, ensayos, experimentos, etcétera.) o en la interacción cotidiana que se realiza en el aula, a partir de las actividades de enseñanza aprendizaje (trabajo en equipo, participación, dudas o comentarios expuestos por las y los estudiantes, revisión de diferentes actividades, entre otros). Según se refiere en el Acuerdo Secretarial 09/08/2023 por el que se regula el MCCEMS, "la evaluación debe llevarse a cabo desde el enfoque formativo, donde no solo hay que evaluar el resultado de aprendizaje, sino todo el proceso". (DOF, 2023a) La evaluación formativa recupera la importancia de la retroalimentación al estudiantado, como una herramienta que permite al personal docente tomar decisiones sobre la selección de estrategias y actividades que coadyuven al desarrollo de las progresiones de aprendizaje y competencias laborales básicas establecidas en las diferentes UAC. Durante el desarrollo de las diferentes actividades se deberá brindar retroalimentación al estudiantado a partir de un diálogo constructivo que derive en el análisis y la reflexión sobre los logros obtenidos, los saberes o habilidades que aún deben consolidar, la pertinencia de las estrategias de aprendizaje o de los recursos que utilizaron. Este diálogo también deberá ofrecer orientaciones para que continúen con el proceso de aprendizaje motivándoles a mejorar o a definir nuevas estrategias para alcanzar las próximas metas. Es decir, la evaluación deberá promover que el estudiantado aprenda a aprender favoreciendo los procesos de construcción del pensamiento, así como las funciones laborales específicas, lo que implica hacerles conscientes de su propio proceso de aprendizaje a partir de la reflexión y que esto les lleve a su autorregulación.

Transversalidad

TRANSVERSALIDAD A PARTIR DEL PROGRAMA, AULA, ESCUELA Y COMUNIDAD

1. Participación en Proyectos Escolares /Proyecto de academia.

El proyecto integrador que se trabaje en el aula, debe enfocarse en el desarrollo de los aprendizajes de trayectoria y progresiones de aprendizaje o competencias laborales básicas, según sea el caso, de una Unidad de Aprendizaje Curricular (UAC), que pueden pertenecer a las áreas de conocimiento, recursos sociocognitivos, recursos socioemocionales o trayectorias ocupacionales, bajo la mirada de la transversalidad, que en el Colegio será de carácter interdisciplinar, el cual, se considera como la interacción real y efectiva entre dos o más UAC para lograr el desarrollo integral; esta interacción puede pasar de la simple comunicación de ideas hasta la integración mutua de conocimientos fundamentales, métodos y procedimientos de enseñanza e investigación y otros aspectos. Se refiere al trabajo de colaboración e integración entre dos o más disciplinas y su enfoque es la obtención de una síntesis; es decir, conceptos, metodologías y prácticas se integran. Diferentes disciplinas trabajan juntas en el mismo proyecto, comparten metas, los participantes tienen funciones comunes, aprenden sobre ellos y entre sí.

TRANSVERSALIDAD DE LA UAC CON OTRAS ÁREAS DE CONOCIMIENTO, RECURSOS SOCIOCOGNITIVOS Y ÁMBITOS DE FORMACIÓN SOCIOEMOCIONAL

1. ¿Qué puede aportar la UAC a los conocimientos y experiencias de los otros Recursos Sociocognitivos, Áreas de Conocimiento y a los Ámbitos de Formación Socioemocional?

La "transversalidad es una estrategia didáctica y curricular que permite la conexión de aprendizajes de forma significativa y con ello da un nuevo sentido a la acción pedagógica de las y los docentes" (DOF, 2024)11. Es decir, favorece la integración del currículo fundamental (recursos sociocognitivos y áreas de conocimiento), el currículo ampliado (recursos socioemocionales) y el currículo laboral (competencias laborales básicas), así como el logro de los aprendizajes de trayectoria, al no centrar la enseñanza en las disciplinas o en los contenidos de cada una de las UAC.

2. ¿Qué pueden aportar los otros Recursos, Áreas de Conocimiento y recursos de la Formación Socioemocional a (la nombre la UAC)?

   El proyecto integrador que se trabaje en el aula, debe enfocarse en el desarrollo de los aprendizajes de trayectoria y progresiones de aprendizaje o competencias laborales básicas, según sea el caso, de una Unidad de Aprendizaje Curricular que pueden pertenecer a las áreas de conocimiento, recursos sociocognitivos, recursos socioemocionales o trayectorias ocupacionales, bajo la mirada de la transversalidad, que en el Colegio será de carácter interdisciplinar, el cual, se considera como la interacción real y efectiva entre dos o más UAC para lograr el desarrollo integral; esta interacción puede pasar de la simple comunicación de ideas hasta la integración mutua de conocimientos fundamentales, métodos y procedimientos de enseñanza e investigación y otros aspectos. Se refiere al trabajo de colaboración e integración entre dos o más disciplinas y su enfoque es la obtención de una síntesis; es decir, conceptos, metodologías y prácticas se integran. Diferentes disciplinas trabajan juntas en el mismo proyecto, comparten metas, los participantes tienen funciones comunes, aprenden sobre ellos y entre sí.

Programación semestral

PROGRESIÓN DE APRENDIZAJE	NO. DE SESIONES	PERIODO
1. Comprende los elementos básicos: punto, recta y plano, a partir de situaciones cotidianas o planteamientos propios de la disciplina.	**5 sesiones de una hora**	**Semana 1**
2. Interpreta los elementos que conforman el plano cartesiano (origen, ejes y cuadrantes) para que pueda ubicar coordenadas sobre el plano.	**5 sesiones de una hora**	**Semana 2**
3. Identifica los elementos a partir de los cuales se puede definir una recta y su ecuación (ordenada al origen, pendiente, puntos, cortes con los ejes).	**5 sesiones de una hora**	**Semana 3**
4. Aplica las diferentes formas de la ecuación de la recta y la comprensión de su comportamiento gráfico en la resolución de problemas y en la explicación de fenómenos o situaciones.	**5 sesiones de una hora**	**Semana 4**
5. Comprende la generación de las secciones cónicas a partir de la intersección entre un plano y un cono de revolución.	**5 sesiones de una hora**	**Semana 5**
6. Plantea las ecuaciones ordinaria y general de la circunferencia a partir de sus elementos (radio y centro) para poder representar y resolver problemas propios de la disciplina y de su entorno.	**5 sesiones de una hora**	**Semana 6**
7. Construye la gráfica de la circunferencia a partir de sus elementos o de las ecuaciones ordinaria y general con apoyo del juego de geometría o software de geometría dinámico.	**5 sesiones de una hora**	**Semana 7**
8. Identifica y describe los elementos de la elipse como lugar geométrico: foco, vértice, centro, lado recto, eje mayor, eje menor para poder caracterizar a la elipse como lugar geométrico.	**5 sesiones de una hora**	**Semana 8**
9. Infiere las ecuaciones ordinaria y general (elipse horizontal y vertical), a partir de sus elementos para resolver situaciones cotidianas que involucren el estudio de la elipse.	**5 sesiones de una hora**	**Semana 9**
10. Construye la representación gráfica de la elipse (con orientación horizontal y vertical) para reconocer su comportamiento gráfico y de los fenómenos o situaciones que representa.	**5 sesiones de una hora**	**Semana 10**
11. Identifica y relaciona entre sí los elementos que conforman la parábola (vértice, foco, lado recto, directriz y parámetro) para describirla como lugar geométrico.	**5 sesiones de una hora**	**Semana 11**
12. Plantea las ecuaciones ordinaria y general de la parábola a partir de la relación entre sus elementos para apoyar en la descripción y resolución de fenómenos, situaciones o problemas.	**5 sesiones de una hora**	**Semana 12**

13. Construye la gráfica de la parábola con base en las ecuaciones ordinaria y general o de sus elementos, que le permiten observar el comportamiento de fenómenos o situaciones.	**5 sesiones de una hora**	**Semana 13**
14. Plantea las ecuaciones ordinaria y general de la hipérbola con base en sus elementos, como vértices, focos, ejes, asíntotas, centro; que le permita la resolución de problemas contextualizados y situaciones inherentes a la asignatura.	**5 sesiones de una hora**	**Semana 14**
15. Construye la gráfica de la hipérbola a partir de las ecuaciones ordinaria y general o de sus elementos, que le permita observar el comportamiento geométrico de situaciones hipotéticas.	**5 sesiones de una hora**	**Semana 15**

Criterios de acreditación de la UAC y ponderación

CRITERIOS	PONDERACIÓN
EVALUACIÓN CUALITATIVA (RÚBRICAS)	40%
Examen escrito	60%
PAEC	**20%**

Momento 1. Identificar la progresión.

PLAN CLASE POR PROGRESIÓN

Número de sesiones para desarrollar la progresión	4
APRENDIZAJE(S) DE TRAYECTORIA.	**PROGRESIÓN POR DESARROLLAR:**
C1M1 Ejecuta cálculos y algoritmos para resolver problemas matemáticos, de las ciencias y de su entorno. C2M1 Observa y obtiene información de una situación o fenómeno para establecer estrategias o formas de visualización que ayuden a entenderlo. C2M2 Desarrolla la percepción y la intuición para generar conjeturas ante situaciones que requieran explicación o interpretación. C3M2 Construye un modelo matemático, identificando las variables de interés, con la finalidad de explicar una situación o fenómeno y/o resolver un problema tanto teórico como de su entorno. C4M1 Describe situaciones o fenómenos empleando rigurosamente el lenguaje matemático y el lenguaje natural.	7. Construye la gráfica de la circunferencia a partir de sus elementos o de las ecuaciones ordinaria y general con apoyo del juego de geometría o software de geometría dinámico.
METAS	
Construye la gráfica de la circunferencia, con el apoyo de regla y compás (a partir de sus elementos, radio, centro y diámetro) o software de geometría dinámico. • Construye la gráfica de la circunferencia a partir de sus ecuaciones ordinaria o general. • Plantea conclusiones y soluciones a problemas a partir del análisis de la gráfica de la circunferencia.	
CATEGORÍAS*	**SUBCATEGORÍAS***
C1 Procedural	S1 Elementos aritmético - algebraicos S2 Elementos geométricos S3 Elementos variacionales
C2 Procesos de intuición y razonamiento	S1 Capacidad para observar y conjeturar S2 Pensamiento intuitivo
C3 Solución de problemas y modelación	
C4 Interacción y lenguaje matemático	S1 Registro escrito, simbólico, algebraico e iconográfico S2 Negociación de significados S3 Ambiente matemático de comunicación

Momento 2. Diseñar una actividad.

ACTIVIDADES DE APERTURA

APERTURA **EN ESTA ETAPA DE LA PLANEACIÓN SE PROMUEVE EL SER Y SE ACTIVAN LOS CONOCIMIENTOS PREVIOS, INICIANDO EL PROCESO DE ENSEÑANZA APRENDIZAJE.**				
ESCENARIO				
NO. SESIÓN 4	**CONTENIDOS INFERIDOS DE LA PROGRESIÓN.**	**PROCESO DE ENSEÑANZA (ACTIVIDAD DOCENTE)**	**PROCESO DE APRENDIZAJE (ACTIVIDAD ESTUDIANTE)**	**RECURSOS DIDÁCTICOS**
1	Elementos de la circunferencia.	Mediante lluvia de idea el maestro explica las partes de la circunferencia.	Coloca nombre que le corresponde a cada elemento en la circunferencia.	Libro Copias COMPUTADORA Calculadora Artículos y páginas de la web Cuaderno de evidencias…
2	Ecuación ordinaria de la circunferencia.	El maestro da ejemplos y explica la ecuación ordinaria de la circunferencia	• Hallar las ecuaciones de las siguientes circunferencias. • Hallar el centro y el radio de la circunferencia cuya ecuación	Libro Copias COMPUTADORA Calculadora Artículos y páginas de la web Cuaderno de evidencias…
3	Ecuación general de la circunferencia.	El maestro da ejemplos y explica la circunferencia cuando se localiza el centro fuera del origen.	➢ Determina la ecuación de cada circunferencia con su respectiva gráfica. ➢ Determina las coordenadas del centro y el radio de la circunferencia cuya ecuación. ➢ Aplicando la fórmula $(x-h)^2+y^2=r^2$, el resultado es	Libro Copias COMPUTADORA Calculadora Artículos y páginas de la web Cuaderno de evidencias…

ACTIVIDADES DE DESARROLLO

DESARROLLO EN ESTA ETAPA DEL PROCESO DE ENSEÑANZA APRENDIZAJE SE PROMUVE EL SER, HACER, DA PASO AL SABER Y LA RETROALIMENTACIÓN.				
ESCENARIO				
NO. ACTIVIDAD	**CONTENIDO DE LA PROGRESIÓN.**	**PROCESO DE ENSEÑANZA (ACTIVIDAD DOCENTE)**	**PROCESO DE APRENDIZAJE (ACTIVIDAD ESTUDIANTE)**	**RECURSOS DIDÁCTICOS**
1	Elementos de la circunferencia.	Mediante lluvia de idea el maestro explica las partes de la circunferencia.	Coloca nombre que le corresponde a cada elemento en la circunferencia.	Libro Copias COMPUTADORA Calculadora Artículos y páginas de la web Cuaderno de evidencias...
2	Ecuación ordinaria de la circunferencia.	El maestro da ejemplos y explica la ecuación ordinaria de la circunferencia	• Hallar las ecuaciones de las siguientes circunferencias. • Hallar el centro y el radio de la circunferencia cuya ecuación	Libro Copias COMPUTADORA Calculadora Artículos y páginas de la web Cuaderno de evidencias... Libro Copias COMPUTADORA Calculadora Artículos y páginas de la web Cuaderno de evidencias...
3	Ecuación general de la circunferencia.	El maestro da ejemplos y explica la circunferencia cuando se localiza el centro fuera del origen.	➢ Determina la ecuación de cada circunferencia con su respectiva gráfica. ➢ Determina las coordenadas del centro y el radio de la circunferencia cuya ecuación. Aplicando la fórmula $(x-h)^2 + y^2 = r^2$, el resultado es	Libro Copias COMPUTADORA Calculadora Artículos y páginas de la web Cuaderno de evidencias...

ACTIVIDADES DE CIERRE

CIERRE **ES ESTE PROCESO SE PROMUEVE EL SER Y EL SABER, MOMENTO IDONEO PARA LA CONSOLIDACIÓN DEL APRENDIZAJE Y CONCRESIÓN**				
ESCENARIO				
NO ACTIVIDAD	**CONTENIDO DE LA PROGRESIÓN.**	**PROCESO DE ENSEÑANZA (ACTIVIDAD DOCENTE)**	**PROCESO DE APRENDIZAJE (ACTIVIDAD ESTUDIANTE)**	**RECURSOS DIDÁCTICOS**
1	Elementos de la circunferencia.	Mediante lluvia de idea el maestro explica las partes de la circunferencia.	Coloca nombre que le corresponde a cada elemento en la circunferencia.	Libro Copias COMPUTADORA Calculadora Artículos y páginas de la web Cuaderno de evidencias…
2	Ecuación ordinaria de la circunferencia.	El maestro da ejemplos y explica la ecuación ordinaria de la circunferencia	• Hallar las ecuaciones de las siguientes circunferencias. • Hallar el centro y el radio de la circunferencia cuya ecuación	Libro Copias COMPUTADORA Calculadora Artículos y páginas de la web Cuaderno de evidencias…
3	Ecuación general de la circunferencia.	El maestro da ejemplos y explica la circunferencia cuando se localiza el centro fuera del origen.	➢ Determina la ecuación de cada circunferencia con su respectiva gráfica. ➢ Determina las coordenadas del centro y el radio de la circunferencia cuya ecuación. Aplicando la fórmula $(x-h)^2+y^2=r^2$, el resultado es	Libro Copias COMPUTADORA Calculadora Artículos y páginas de la web Cuaderno de evidencias… Libro Copias COMPUTADORA Calculadora Artículos y páginas de la web Cuaderno de evidencias…

Momento 3. Evaluación formativa

(Como Enfoque de evaluación):

EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA RESPECTO A LA PROGRESIÓN

EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA				
ACTIVIDAD DE EVALUACIÓN	**CRITERIOS DE EVALUACIÓN DE LA ACTIVIDAD**	**PONDERACIÓN**	**TÉCNICA Y/O INSTRUMENTO DE EVALUACIÓN**	**TIPO DE EVALUACIÓN POR AGENTE**
Coloca nombre que le corresponde a cada elemento en la circunferencia.	Las actividades se registrarán en una lista de seguimiento.	30%	Lista de cotejo.	Evaluación continua. Autoevaluación.
• Hallar las ecuaciones de las siguientes circunferencias. • Hallar el centro y el radio de la circunferencia cuya ecuación	Las actividades se registrarán en una lista de seguimiento.	30%	Lista de cotejo.	Evaluación continua. Autoevaluación.
➢ Determina la ecuación de cada circunferencia con su respectiva gráfica. ➢ Determina las coordenadas del centro y el radio de la circunferencia cuya ecuación. Aplicando la fórmula $(x-h)^2+y^2=r^2$, el resultado es	Las actividades se registrarán en una lista de seguimiento.	30%	Lista de cotejo.	Evaluación continua. Autoevaluación.

EVALUACIÓN FORMATIVA

Estrategias y momentos de retroalimentación	
Estrategias de retroalimentación	**Momentos de retroalimentación**
Darle a conocer al alumno su desempeño durante las clases al momento de revisar sus actividades o que pase al pizarrón tomando en cuente el esfuerzo realizado.	1.- Revisión de actividad personal. 2.- Desempeño en el pizarrón. 3.- Aporte durante las clases.

EVALUACIÓN SUMATIVA

EVALUACIÓN DE LAS ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE DE LA PROGRESIÓN PARA LA ACREDITACIÓN DE LA UAC

EVALUACIÓN SUMATIVA (PARA EFECTOS DE ACREDITACIÓN DE LA UAC)			
ACTIVIDADES PARA EVALUAR EL AVANCE DEL ALUMNO EN LA PROGRESIÓN	**CRITERIOS DE EVALUACIÓN Y PONDERACIÓN**	**INSTRUMENTO DE EVALUACIÓN**	**TIPO DE EVALUACIÓN POR AGENTE DE EVALUACIÓN**
Reconozca a través de la evaluación el avance que desarrollo y la forma en que manejo sus conocimientos en la elaboración de las actividades.	**10% autoevaluación 30 % actividades 10% participación.**	**Lista de cotejo y control de desempeño del estudiante.**	**Evaluación docente.**

Momento 1. Identificar la progresión.

PLAN CLASE POR PROGRESIÓN

Número de sesiones para desarrollar la progresión	**4**
APRENDIZAJE(S) DE TRAYECTORIA.	**PROGRESIÓN POR DESARROLLAR:**
C2M1 Observa y obtiene información de una situación o fenómeno para establecer estrategias o formas de visualización que ayuden a entenderlo	8. Identifica y describe los elementos de la elipse como lugar geométrico: foco, vértice, centro, lado recto, eje mayor, eje menor para poder caracterizar a la elipse como lugar geométrico.

METAS
Define a la elipse como lugar geométrico a partir de las condiciones geométricas que debe cumplir. • Identifica los elementos que caracterizan a la elipse. • Asocia entre sí los elementos y el diagrama de la elipse.

CATEGORÍAS*	**SUBCATEGORÍAS***
C2 Procesos de intuición y razonamiento	S1 Capacidad para observar y conjeturar S2 Pensamiento intuitivo

Momento 2. Diseñar una actividad.

ACTIVIDADES DE APERTURA

APERTURA EN ESTA ETAPA DE LA PLANEACIÓN SE PROMUEVE EL SER Y SE ACTIVAN LOS CONOCIMIENTOS PREVIOS, INICIANDO EL PROCESO DE ENSEÑANZA APRENDIZAJE.				
ESCENARIO				
NO. SESIÓN 4	**CONTENIDOS INFERIDOS DE LA PROGRESIÓN.**	**PROCESO DE ENSEÑANZA (ACTIVIDAD DOCENTE)**	**PROCESO DE APRENDIZAJE (ACTIVIDAD ESTUDIANTE)**	**RECURSOS DIDÁCTICOS**
1	La elipse como lugar geométrico	Dará una pequeña introducción al tema.	El alumno leerá y elaborará una formulario de las partes de la elipse.	Libro Copias COMPUTADORA Calculadora Artículos y páginas de la web Cuaderno de evidencias…
2	Ecuación ordinaria de la elipse con centro en el origen.	El maestro explica y da ejemplos de la elipse en el origen.	Obtener la ecuación ordinaria de la elipse con C(3,2), eje mayor paralelo al eje “x” , 2a=4 y 2b=3.	Libro Copias COMPUTADORA Calculadora Artículos y páginas de la web Cuaderno de evidencias…
3	Ecuación ordinaria de la elipse con centro fuera del origen.	El maestro explica y da ejemplos de la elipse fuera del origen.	Hallar la ecuación ordinaria de la elipse con A (6,0), A’(-6,0), 2b= 10.	
4	Ecuación general de la elipse	El maestro explica y da ejemplos de la ecuación de la elipse.	Obtener la ecuación de la elipse con los datos siguientes: A(0,8), A’(0,8), F(0,6).	Libro Copias COMPUTADORA Calculadora Artículos y páginas de la web Cuaderno de evidencias…

ACTIVIDADES DE DESARROLLO

DESARROLLO EN ESTA ETAPA DEL PROCESO DE ENSEÑANZA APRENDIZAJE SE PROMUVE EL SER, HACER, DA PASO AL SABER Y LA RETROALIMENTACIÓN.				
ESCENARIO				
NO. ACTIVIDAD	**CONTENIDO DE LA PROGRESIÓN.**	**PROCESO DE ENSEÑANZA (ACTIVIDAD DOCENTE)**	**PROCESO DE APRENDIZAJE (ACTIVIDAD ESTUDIANTE)**	**RECURSOS DIDÁCTICOS**
1	La elipse como lugar geométrico	Dará una pequeña introducción al tema.	El alumno leerá y elaborará un formulario de las partes de una elipse.	Libro Copias COMPUTADORA Calculadora Artículos y páginas de la web Cuaderno de evidencias...
2	Ecuación ordinaria de la elipse con centro en el origen.	El maestro explica y da ejemplos de lo que es la elipse.	Expresa las formula de la elipse:	Libro Copias COMPUTADORA Calculadora Artículos y páginas de la web Cuaderno de evidencias...
3	Ecuación ordinaria de la elipse con centro fuera del origen.	El maestro explica y da ejemplos de lo que es la elipse.	Expresa las formula de la elipse.	Libro Copias COMPUTADORA Calculadora Artículos y páginas de la web Cuaderno de evidencias...
4	Ecuación general de la elipse	El maestro explica las diferentes de las Ec. de la elipse.	Resuelve problemas de las fórmulas de la elipse.	Libro Copias COMPUTADORA Calculadora Artículos y páginas de la web Cuaderno de evidencias...

ACTIVIDADES DE CIERRE

CIERRE ES ESTE PROCESO SE PROMUEVE EL SER Y EL SABER, MOMENTO IDONEO PARA LA CONSOLIDACIÓN DEL APRENDIZAJE Y CONCRESIÓN				
ESCENARIO				
NO ACTIVIDAD	**CONTENIDO DE LA PROGRESIÓN.**	**PROCESO DE ENSEÑANZA (ACTIVIDAD DOCENTE)**	**PROCESO DE APRENDIZAJE (ACTIVIDAD ESTUDIANTE)**	**RECURSOS DIDÁCTICOS**
1	La elipse como lugar geométrico	Dará una pequeña introducción al tema.	El alumno colocara las palabras en un recuadro correspondiente según sea la definición con los matemáticos que las mencionaron.	Libro Copias COMPUTADORA Calculadora Artículos y páginas de la web Cuaderno de evidencias...
2	Ecuación ordinaria de la elipse con centro en el origen.	El maestro da la introducción al tema de las elipse.	Expresa las formula de la elipse:	Libro Copias COMPUTADORA Calculadora Artículos y páginas de la web Cuaderno de evidencias...
3	Ecuación ordinaria de la elipse con centro fuera del origen.	El maestro explica y da ejemplos de lo que es la elipse.	Expresa las formula de elipse	
4	Ecuación general de la elipse	El maestro explica y da ejemplos de la elipse.	Resuelve problemas de las fórmulas de la elipse.	Libro Copias COMPUTADORA Calculadora Artículos y páginas de la web Cuaderno de evidencias...

Momento 3. Evaluación formativa

(Como Enfoque de evaluación):

EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA RESPECTO A LA PROGRESIÓN

EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA				
ACTIVIDAD DE EVALUACIÓN	**CRITERIOS DE EVALUACIÓN DE LA ACTIVIDAD**	**PONDERACIÓN**	**TÉCNICA Y/O INSTRUMENTO DE EVALUACIÓN**	**TIPO DE EVALUACIÓN POR AGENTE**
La elipse como lugar geométrico	Las actividades se registrarán en una lista de seguimiento.	30%	Lista de cotejo.	Evaluación continua. Autoevaluación.
Ecuación ordinaria de la elipse con centro en el origen.	Las actividades se registrarán en una lista de seguimiento.	30%	Lista de cotejo.	Evaluación continua. Autoevaluación.
Ecuación ordinaria de la elipse con centro fuera del origen.	Las actividades se registrarán en una lista de seguimiento.	30%	Lista de cotejo.	Evaluación continua. Autoevaluación.
Ecuación general de la elipse	Las actividades se registrarán en una lista de seguimiento.	30%	Lista de cotejo.	Evaluación continua. Autoevaluación. .

EVALUACIÓN FORMATIVA

Estrategias y momentos de retroalimentación	
Estrategias de retroalimentación	**Momentos de retroalimentación**
Darle a conocer al alumno su desempeño durante las clases al momento de revisar sus actividades o que pase al pizarrón tomando en cuente el esfuerzo realizado.	1.- Revisión de actividad personal. 2.- Desempeño en el pizarrón. 3.- Aporte durante las clases.

EVALUACIÓN SUMATIVA

EVALUACIÓN DE LAS ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE DE LA PROGRESIÓN PARA LA ACREDITACIÓN DE LA UAC

EVALUACIÓN SUMATIVA (PARA EFECTOS DE ACREDITACIÓN DE LA UAC)			
ACTIVIDADES PARA EVALUAR EL AVANCE DEL ALUMNO EN LA PROGRESIÓN	CRITERIOS DE EVALUACIÓN Y PONDERACIÓN	INSTRUMENTO DE EVALUACIÓN	TIPO DE EVALUACIÓN POR AGENTE DE EVALUACIÓN
Reconozca a través de la evaluación el avance que desarrollo y la forma en que manejo sus conocimientos en la elaboración de las actividades.	10% autoevaluación 30 % actividades 10% participación.	Lista de cotejo y control de desempeño del estudiante.	Evaluación docente.

Momento 1. Identificar la progresión.

PLAN CLASE POR PROGRESIÓN

Número de sesiones para desarrollar la progresión	4
APRENDIZAJE(S) DE TRAYECTORIA.	**PROGRESIÓN POR DESARROLLAR:**
C2M1 Observa y obtiene información de una situación o fenómeno para establecer estrategias o formas de visualización que ayuden a entenderlo	11. Identifica y relaciona entre sí los elementos que conforman la parábola (vértice, foco, lado recto, directriz y parámetro) para describirla como lugar geométrico.
METAS	
Describe la parábola como lugar geométrico con base en su definición y condiciones. • Reconoce los elementos de la parábola: vértice, foco, lado recto, directriz y parámetro.	
CATEGORÍAS*	**SUBCATEGORÍAS***
C2 Procesos de intuición y razonamiento.	S1 Capacidad para observar y conjeturar S2 Pensamiento intuitivo S3 Pensamiento formal

Momento 2. Diseñar una actividad.

ACTIVIDADES DE APERTURA

<table>
<tr><th colspan="5"><u>APERTURA</u>
EN ESTA ETAPA DE LA PLANEACIÓN SE PROMUEVE EL SER Y SE ACTIVAN LOS CONOCIMIENTOS PREVIOS, INICIANDO EL PROCESO DE ENSEÑANZA APRENDIZAJE.</th></tr>
<tr><td>ESCENARIO</td><td colspan="4"></td></tr>
<tr><td>NO. SESIÓN 4</td><td>CONTENIDOS INFERIDOS DE LA PROGRESIÓN.</td><td>PROCESO DE ENSEÑANZA (ACTIVIDAD DOCENTE)</td><td>PROCESO DE APRENDIZAJE (ACTIVIDAD ESTUDIANTE)</td><td>RECURSOS DIDÁCTICOS</td></tr>
<tr><td>1</td><td>Elementos de la parábola.</td><td>El maestro da la introducción al tema de las parábolas.</td><td>resuelve correctamente los siguientes problemas.</td><td rowspan="4">Libro
Copias
COMPUTADORA
Calculadora
Artículos y páginas de la web
Cuaderno de evidencias...</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Ecuación ordinaria de la parábola con vértice en el origen.</td><td>El maestro explica y da ejemplos de lo que es la fórmula ordinaria.</td><td>Conocido un punto de la parábola obtener la ecuación correspondiente:</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Ecuación ordinaria de la parábola con vértice fuera del origen.</td><td>El maestro explica y da ejemplos de la formula general.</td><td>Conocido un punto de la parábola obtener la ecuación correspondiente:</td></tr>
<tr><td>4</td><td>Ecuación general de la parábola.</td><td>El maestro explica y da ejemplos de la formula general de la parábola</td><td>Hallar la ecuación de la formula general de la parabola.</td></tr>
</table>

ACTIVIDADES DE DESARROLLO

DESARROLLO EN ESTA ETAPA DEL PROCESO DE ENSEÑANZA APRENDIZAJE SE PROMUVE EL SER, HACER, DA PASO AL SABER Y LA RETROALIMENTACIÓN.				
ESCENARIO				
NO. ACTIVIDAD	CONTENIDO DE LA PROGRESIÓN.	PROCESO DE ENSEÑANZA (ACTIVIDAD DOCENTE)	PROCESO DE APRENDIZAJE (ACTIVIDAD ESTUDIANTE)	RECURSOS DIDÁCTICOS
1	Elementos de la parábola.	El maestro da la introducción al tema de las parábolas.	resuelve correctamente los siguientes problemas.	Libro Copias COMPUTADORA Calculadora Artículos y páginas de la web Cuaderno de evidencias…
2	Ecuación ordinaria de la parábola con vértice en el origen.	El maestro explica y da ejemplos de lo que es la fórmula ordinaria.	Conocido un punto de la parábola obtener la ecuación correspondiente:	
3	Ecuación ordinaria de la parábola con vértice fuera del origen.	El maestro explica y da ejemplos de la formula general.	Conocido un punto de la parábola obtener la ecuación correspondiente:	
4	Ecuación general de la parábola.	El maestro explica y da ejemplos de la formula general de la parábola	Hallar la ecuación de la formula general de la parabola.	

ACTIVIDADES DE CIERRE

CIERRE **ES ESTE PROCESO SE PROMUEVE EL SER Y EL SABER, MOMENTO IDONEO PARA LA CONSOLIDACIÓN DEL APRENDIZAJE Y CONCRESIÓN**				
ESCENARIO				
NO ACTIVIDAD 4	**CONTENIDO DE LA PROGRESIÓN.**	**PROCESO DE ENSEÑANZA (ACTIVIDAD DOCENTE)**	**PROCESO DE APRENDIZAJE (ACTIVIDAD ESTUDIANTE)**	**RECURSOS DIDÁCTICOS**
1	Elementos de la parábola.	El maestro da la introducción al tema de las líneas y explica la forma de aplicar las fórmulas.	resuelve correctamente los siguientes problemas.	Libro Copias COMPUTADORA Calculadora Artículos y páginas de la web Cuaderno de evidencias...
2	Ecuación ordinaria de la parábola con vértice en el origen.	El maestro explica y da ejemplos de lo que es la fórmula ordinaria.	Conocido un punto de la parábola obtener la ecuación correspondiente:	
3	Ecuación ordinaria de la parábola con vértice fuera del origen.	El maestro explica y da ejemplos de lo que es la fórmula ordinaria.	Conocido un punto de la parábola obtener la ecuación correspondiente:	
4	Ecuación general de la parábola.	El maestro explica y da ejemplos de la formula general.	Hallar la ecuación de la formula general de la parábola.	

Momento 3. Evaluación formativa

(Como Enfoque de evaluación):

EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA RESPECTO A LA PROGRESIÓN

EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA				
ACTIVIDAD DE EVALUACIÓN	**CRITERIOS DE EVALUACIÓN DE LA ACTIVIDAD**	**PONDERACIÓN**	**TÉCNICA Y/O INSTRUMENTO DE EVALUACIÓN**	**TIPO DE EVALUACIÓN POR AGENTE**
Elementos de la parábola.	Las actividades se registrarán en una lista de seguimiento.	30%	Lista de cotejo.	Evaluación continua. Autoevaluación.
	Las actividades se registrarán en una lista de seguimiento.	30%	Lista de cotejo.	Evaluación continua. Autoevaluación.
Ecuación ordinaria de la parábola con vértice en el origen.	Las actividades se registrarán en una lista de seguimiento.	30%	Lista de cotejo.	Evaluación continua. Autoevaluación.
Ecuación ordinaria de la parábola con vértice fuera del origen.	Las actividades se registrarán en una lista de seguimiento.	30%	Lista de cotejo.	Evaluación continua. Autoevaluación.
	Las actividades se registrarán en una lista de seguimiento.	30%	Lista de cotejo.	Evaluación continua. Autoevaluación.
Ecuación general de la parábola.	Las actividades se registrarán en una lista de seguimiento.	30%	Lista de cotejo.	Evaluación continua. Autoevaluación.

EVALUACIÓN FORMATIVA

Estrategias y momentos de retroalimentación	
Estrategias de retroalimentación	**Momentos de retroalimentación**
Darle a conocer al alumno su desempeño durante las clases al momento de revisar sus actividades o que pase al pizarrón tomando en cuente el esfuerzo realizado.	1.- Revisión de actividad personal. 2.- Desempeño en el pizarrón. 3.- Aporte durante las clases.

EVALUACIÓN SUMATIVA

EVALUACIÓN DE LAS ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE DE LA PROGRESIÓN PARA LA ACREDITACIÓN DE LA UAC

EVALUACIÓN SUMATIVA (PARA EFECTOS DE ACREDITACIÓN DE LA UAC)			
ACTIVIDADES PARA EVALUAR EL AVANCE DEL ALUMNO EN LA PROGRESIÓN	CRITERIOS DE EVALUACIÓN Y PONDERACIÓN	INSTRUMENTO DE EVALUACIÓN	TIPO DE EVALUACIÓN POR AGENTE DE EVALUACIÓN
Reconozca a través de la evaluación el avance que desarrollo y la forma en que manejo sus conocimientos en la elaboración de las actividades.	10% autoevaluación 30 % actividades 10% participación.	Lista de cotejo y control de desempeño del estudiante.	Evaluación docente.

Referencias bibliográficas

Aguilar, A. (2009). Geometría analítica. Pearson Educación Carpinteyro, E. (2016). Geometría analítica: Grupo Editorial Patria CONAMAT. (2009) Geometría Analítica. Editorial Pearson Educación. https://profefily.com/wp-content/uploads/2019/10/Geometria

Lehmann, C. (2000). Geometría Analítica. Vigesimonovena. Reimpresión. Editorial Limusa. Matemáticas profe. Alex. (2016) Ecuación de la circunferencia. (Curso completo). [video]. YouTube. https://youtube.com/playlist?list=PLeySRPnY35dEqa7TokZvU6AqPL0n246JA&si=C2IFbwiiR8gAwhuv Matemáticas profe. Alex. (2018) Ecuación de la elipse. Curso completo. [video]. YouTube. https://youtube.com/playlist?list=PLeySRPnY35dGeN2p7_sJ_v_mhoIZtO5kV&si=JRP6XJlyl_2WtBfG Ruiz, J. (2014). Matemáticas 3: Geometría Analítica Básica. Grupo Editorial Patria Salazar, L., Bahena, H. y Vega, F. (2020). Geometría Analítica. Grupo Editorial Patria. Vázquez, A. (2003). Fundamentos de Geometría Analítica. Editorial Color.

Elaboró	Revisó	Validó	Sello de la institución.
JUAN PICHARDO VELAZQUEZ		**ADRIÁN ANDRADE ALMANZA**	
Nombre del (a) docente que elabora la planeación	**Presidente de academia**	**Subdirector escolar**	

ANEXO

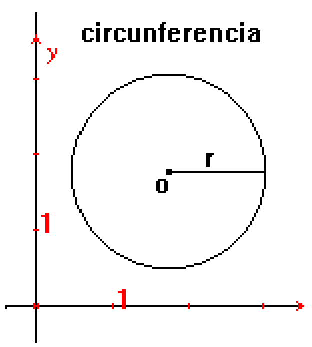
Unidad III

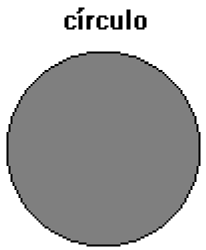
CIRCUNFERENCIA Y CIRCULO

Definición de circunferencia.

La circunferencia se define como el lugar geométrico de todos los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado centro. La distancia del centro a cualquier punto de la circunferencia se le llama radio.

Un círculo es el espacio interior delimitado por la circunferencia.





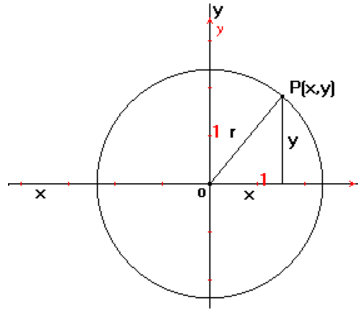
Ecuación de la circunferencia con centro en el origen y radio r.

Sea la circunferencia de centro O(0,0) y radio r. Aplicando el método de los lugares geométricos, tendremos:

1. Sea el punto P(x, y) un punto cualquiera de la circunferencia .

2. La condición que establece que P es de la circunferencia $\overline{oP} = r$.

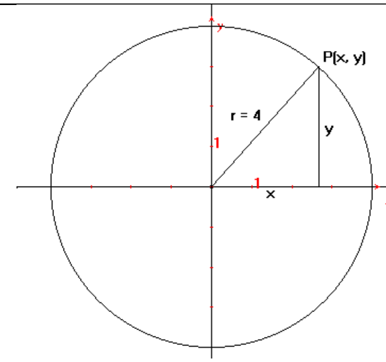
3. Traduciendo analíticamente (fórmula de la distancia entre dos puntos) $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ó $x^2 + y^2 = r^2$, que es la ecuación cartesiana de la circunferencia de centro el origen y radio r.



Ejemplo: La ecuación de la circunferencia de centro en el origen y radio 4.

Aplicando la fórmula anteriormente obtenida y sustituyendo.

$$x^2 + y^2 = r^2$$
$$x^2 + y^2 = (4)^2$$
$$x^2 + y^2 = 16$$

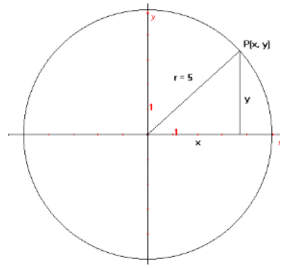


Ejercicios: Hallar las ecuaciones de las siguientes circunferencias.

a) $C(0,0)\ r = 3$, b) $C(0,0)\ r = -2$ c) $C(0,0)\ r = 2\frac{1}{5}$

Hallar el centro y el radio de la circunferencia cuya ecuación es $x^2 + y^2 = 25$

Cuando la ecuación solo tiene $x^2 + y^2$ indica que el centro es el origen $C(0,0)$ y $r^2 = 25$, entonces $r = \sqrt{25} = 5$.



Ejercicios: Hallar el centro y el radio de las siguientes circunferencias.

1. $x^2 + y^2 = 144$

2. $x^2 + y^2 = \frac{4}{9}$

3. $x^2 + y^2 = 100$

4. $x^2 + y^2 = \frac{16}{121}$

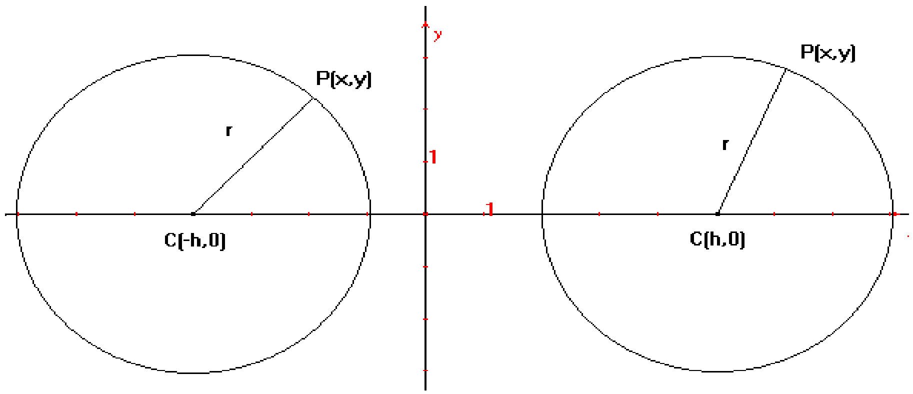
Ecuación una circunferencia de centro en uno de los ejes coordenados y radio.

Primer caso. El centro se localiza sobre el eje “x”.

Si llamamos h a la abscisa del centro, sus coordenadas serán $C(h,0)$ ó $C(-h,0)$.

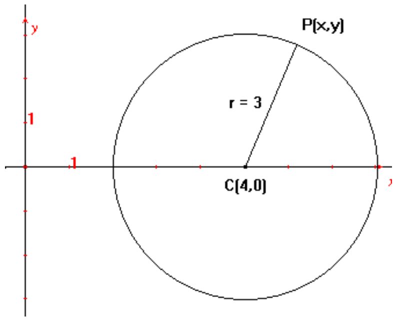
Si $P(x, y)$ es un punto cualquiera de la circunferencia. Donde $\overline{CP} = r$

$$\sqrt{(x-h)^2 + y^2} = r$$
$$(x-h)^2 + y^2 = r^2$$



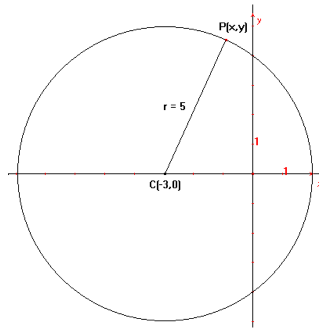
Ejemplos: La ecuación de la circunferencia de centro $C(4,0)$ y $r = 3$

$$(x-h)^2 + y^2 = r^2$$
$$(x-4)^2 + y^2 = (3)^2$$
$$x^2 - 8x + 16 + y^2 = 9$$
$$x^2 + y^2 - 8x + 16 - 9 = 0$$
$$x^2 + y^2 - 8x + 7 = 0$$



La ecuación de la circunferencia de centro $C(-3{,}0)$ y $r=5$

$$(x-h)^2+y^2=r^2$$
$$(x+3)^2+y^2=(5)^2$$
$$x^2+6x+9+y^2=25$$
$$x^2+y^2+6x+9-25=0$$
$$x^2+y^2+6x-16=0$$



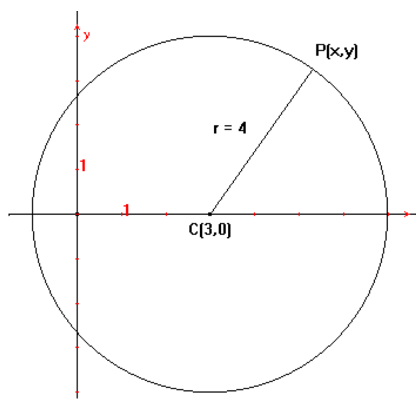
Ejercicios:

Determina la ecuación de cada circunferencia con su respectiva gráfica.

1. $C(-2,0)\ r = 2$
2. $C(3,0)\ r = 2\frac{1}{2}$
3. $C(4,0)\ r = 0.25$

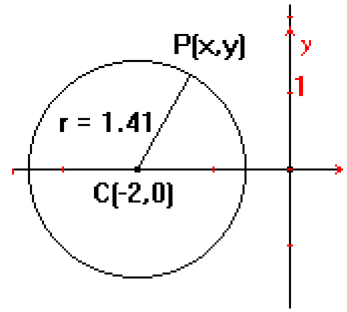
4. Determina las coordenadas del centro y el radio de la circunferencia cuya ecuación es: $(x-3)^2+y^2=16$

5. Aplicando la fórmula $(x-h)^2+y^2=r^2$, el resultado es $C(3,0)$ y $r=4$.



1. Determina las coordenadas del centro y el radio de la circunferencia cuya ecuación es: $(x+2)^2 + y^2 = 2$

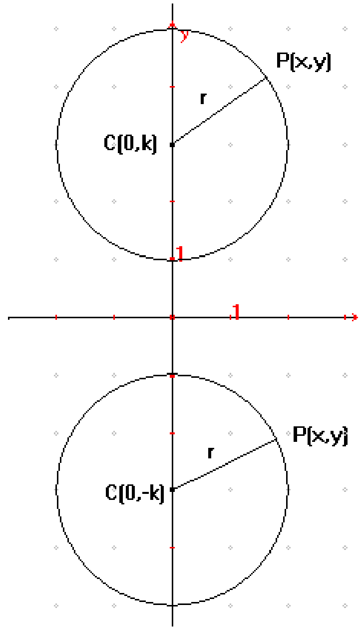
2. Aplicando la fórmula $(x-h)^2 + y^2 = r^2$, el resultado es $C(-2,0)$ y $r = \sqrt{2}$.



Ejercicios:

Hallar el centro y el radio de las siguientes circunferencias.

1. $(x-4)^2 + y^2 = 64$ 2. $(x+8)^2 + y^2 = 25$ 3. $(x+3)^2 + y^2 = 18$



d) $(x-5)^2 + y^2 = 13$

e) $(x+6)^2 + y^2 = 4$

f) $\left(x-\frac{2}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{25}{4}$

Segundo caso. El centro se localiza sobre el eje “y”.

Si llamamos k a la ordenada del centro, sus coordenadas serán $C(0,k)$ ó $C(0,-k)$.

Si $P(x,y)$ es un punto cualquiera de la circunferencia. Donde $\overline{CP} = r$

$$\sqrt{x^2+(y-k)^2}=r$$
$$x^2+(y-k)^2=r^2$$

Resuelve los siguientes ejercicios y gráfica.

1. $C(-2,0)\ \ r=2$
2. $C(3,0)\ \ r=1\frac{1}{2}$
3. $C(4,0)\ \ r=0.25$
4. $C(-3,0)\ \ r=3$
5. $C(-4,0)\ \ r=2\frac{1}{2}$

Ejemplo: Hallar el centro y el radio de la siguientes circunferencias cuyas ecuaciones se indican.

$$(x-3)^2+y^2=16$$
$$(x-h)^2+y^2=r^2$$
$$C(3,0)\ \ r=4$$

$$(x+2)^2+y^2=2$$
$$(x-h)^2+y^2=r^2$$
$$C(-2,0)\ \ r=\sqrt{2}$$

Ejercicios. Hallar el centro y el radio de las siguientes circunferencias.

a) $(x-4)^2 + y^2 = 64$ b) $(x+8)^2 + y^2 = 25$ c) $(x+3)^2 + y^2 = 18$

d) $(x+6)^2 + y^2 = 4$ e) $(x-5)^2 + y^2 = 3$

Segundo caso.

El centro se localiza en el eje "y".

Si llamamos K a la ordenada del centro, sus coordenadas son de la forma $C(0,k)$, resultando la ecuación siguiente: $x^2 + (y-k)^2 = r^2$

Ejemplos:

La ecuación de la circunferencia de centro $(0,-4)$ $r=5$ es:

$$x^2 + (y+4)^2 = 5^2$$
$$x^2 + (y+4)^2 = 25$$
$$x^2 + y^2 + 8y + 16 - 25 = 0$$
$$x^2 + y^2 + 8y - 9 = 0$$

La ecuación $x^2+(y-1)^2=7$, representa una circunferencia, entonces obtenemos como centro $(0,1)$ y $r=\sqrt{7}$.

Ejercicios:

1. $x^2+(y-3)^2=8$

2. $x^2+(y+2)^2=3$

3. $x^2+(y-5)^2=4$

4. $x^2+(y-6)^2=5$

5. $x^2+(y+5)^2=2$

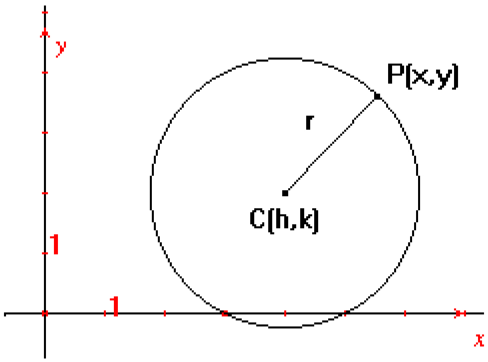
Ecuación de la circunferencia, cuando el centro es un punto cualquiera del plano cartesiano.

Forma ordinaria de la ecuación de la circunferencia.

Sea (h,k) el centro r el radio y $P(x,y)$ un punto cualquiera de la circunferencia.

$$\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2}=r$$

Ecuación ordinaria de una circunferencia de radio r y de centro un punto cualquiera $C(h.k)$ del plano.



Ejemplo: Hallar el centro y el radio de las siguientes ecuaciones.

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 25$$
$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$
$$C(2,3), \quad r = 5$$

$$(x+4)^2 + (y-2)^2 = 16$$
$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$
$$C(-4,2), \quad r = 4$$

Ejemplo: Hallar las ecuaciones de las circunferencias cuyo centro y radio se indican.

$$C(-4,2),\ r=4$$
$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$
$$(x+4)^2+(y-2)^2=4^2$$
$$x^2+8x+16+y^2-4y+4-16=0$$
$$x^2+y^2+8x-4y+4=0$$

$$C(5,-3),\ r=7$$
$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$
$$(x-5)^2+(y+3)^2=7^2$$
$$x^2-10x+25+y^2+6y+9-49=0$$
$$x^2+y^2-10x+6y-15=0$$

Ejemplo: Hallar el centro y el radio de la siguiente circunferencia.

$$(x-2)^2+(y-3)^2=25$$
$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$
$$C(2,3),\ r=5$$

$$(x+5)^2+(y+9)^2=36$$
$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$
$$C(-5,-9),\ r=6$$

Ejemplo: Hallar la ecuación de la circunferencia que tiene como centro $(-2,-3)$, o sea (h,k) y pasa por el punto $A(2,4)$.

Para conocer el radio obtenemos la distancia entre el centro y el punto por donde pasa la circunferencia.

$$r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$r = \sqrt{(2+2)^2 + (4+3)^2}$$
$$r = \sqrt{(4)^2 + (7)^2}$$
$$r = \sqrt{16+49}$$
$$r = \sqrt{65}$$

Aplicando la ecuación ordinaria de la circunferencia y sustituyendo se obtiene.

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$
$$(x+2)^2 + (y+3)^2 = \left(\sqrt{65}\right)^2$$
$$x^2 + 4x + 4 + y^2 + 6y + 9 - 65 = 0$$
$$x^2 + y^2 + 4x + 6y - 52 = 0$$

Ejercicios:

Hallar las ecuaciones de las siguientes circunferencias.

1. $C(2,-3)$ $r=5$

2. $C\left(3,-\frac{1}{2}\right)$ $r=3$

3. $C\left(-\frac{1}{2},4\right)$ $r=\frac{3}{2}$

4. $C\left(-\frac{2}{3},-\frac{1}{2}\right)$ $r=\frac{2}{3}$

5. $C\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{3}\right)$ $r=3$

Hallar el centro y el radio de las siguientes circunferencias.

6. $(x-3)^2+(y+2)^2=4$

7. $(x-3)^2+(y-2)^2=\frac{25}{4}$

8. $(x-3)^2+(y-1)^2=0$

9. $(x+4)^2+(y-3)^2=\frac{4}{9}$

e) $(x+6)^2+(y+3)^2=\frac{2}{4}$

Dada la ecuación de una circunferencia en su forma general hallar las coordenadas del centro y el radio.

Convirtiendo la ecuación general a la forma ordinaria $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

Completando los trinomios cuadrados perfectos.

Ejemplos: Hallar las coordenadas del centro y el radio de las siguientes circunferencias.

$$x^2+y^2+4x+6y+9=0$$
$$x^2+4x+4+y^2+6y+9=-9+4+9$$
$$(x+2)^2+(y+3)^2=4$$
$$C(-2,-3)\quad r=2$$

Otro procedimiento es usar las siguientes fórmulas partiendo de la ecuación general de la circunferencia.

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$$

$$x^2+y^2+4x+6y+9=0$$

donde: D = 4, E = 6 y F = 9

$$h = -\frac{D}{2}, \quad k = -\frac{E}{2} \quad \text{y} \quad r = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$$

$$h = -\frac{4}{2} = -2, \quad k = -\frac{6}{2} = -3 \quad \text{y}$$

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{(4)^2 + (6)^2 - 4(9)} = \frac{1}{2}\sqrt{16 + 36 - 36} = \frac{1}{2}\sqrt{16} = \frac{4}{2} = 2$$

De tal forma que las coordenadas del centro son $(-2, -3)$ y $r = 2$.

Hallar las coordenadas del centro y el radio de las siguientes circunferencias.

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$$
$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 = 4 + 4 + 1$$
$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 9$$
$$C(2,1) \quad r = 3$$

Otro procedimiento es usar las siguientes fórmulas partiendo de la ecuación general de la circunferencia.

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$$

donde: D = -4, E = -2 y F = -4

$$h = -\frac{D}{2}, \quad k = -\frac{E}{2} \text{ y } r = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$$

$$h=-\left(\frac{-4}{2}\right)=\frac{4}{2}=2\ , \qquad k=-\left(\frac{-2}{2}\right)=\frac{2}{2}=1 \qquad \text{y}$$

$$r=\frac{1}{2}\sqrt{(-4)^2+(-2)^2-4(-4)}=\frac{1}{2}\sqrt{16+4+16}=\frac{1}{2}\sqrt{36}=\frac{6}{2}=3$$

De tal forma que las coordenadas del centro son $(2,1)$ y $r=3$.

Nota: Si el coeficiente de los términos cuadráticos (x^2 y y^2) no es la unidad, antes de completar los trinomios cuadrados perfectos se dividen toda la ecuación por dicho coeficiente.

Ejemplo: Hallar las coordenadas del centro y el radio de las siguientes circunferencias.

$$4x^2+4y^2-4x+16y-19=0$$
$$\frac{4x^2+4y^2-4x+16y-19=0}{4}$$
$$x^2+y^2-x+4y-\frac{19}{4}=0$$
$$x^2-x+\frac{1}{4}+y^2+4y+4=\frac{19}{4}+\frac{1}{4}+4$$
$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y+2)^2=9$$
$$C\left(\frac{1}{2},-2\right) \quad r=3$$

Otro procedimiento es usar las siguientes fórmulas partiendo de la ecuación general de la circunferencia.

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$$

$$x^2+y^2-x+4y-\frac{19}{4}=0$$

donde: $D=-1$, $E=4$ y $F=-\frac{19}{4}$

$$h = -\frac{D}{2},\; k = -\frac{E}{2} \text{ y } r = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$$

$$h = -\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}, \qquad k = -\frac{4}{2} = -2 \qquad \text{y}$$

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{(-1)^2 + (4)^2 - 4\left(-\frac{19}{4}\right)} = \frac{1}{2}\sqrt{1+16-19} = \frac{1}{2}\sqrt{36} = \frac{6}{2} = 3$$

De tal forma que las coordenadas del centro son $\left(\frac{1}{2}, -2\right)$ y $r = 3$.

Para comprobar si una ecuación pertenece a una circunferencia real, imaginario o sólo son las coordenadas de un punto se toma en cuenta lo siguiente:

Si $\sqrt{D^2 + E^2 - 4F} \rangle 1 \Rightarrow$ **circunferencia real**

Si $\sqrt{D^2+E^2-4F}\ \langle\ 1 \Rightarrow$ **circunferencia imaginaria**

Si $\sqrt{D^2+E^2-4F}=0 \Rightarrow$ **circunferencia nula o círculo punto**

Ejemplo: Comprobar si la ecuación $x^2+y^2+6x-2y+6=0$ representa una circunferencia.

$D=6$, $E=-2$ y $F=6$, sustituyendo los valores en $\sqrt{D^2+E^2-4F}$ tenemos:

$$\begin{aligned}
&\sqrt{D^2+E^2-4F} = \\
&= \sqrt{(6)^2+(-2)^2-4(6)} \\
&= \sqrt{36+4-24} \\
&= \sqrt{16} \\
&= 4\ \rangle\ 1
\end{aligned}$$

La circunferencia es real.

Comprobar si la ecuación $x^2+y^2-4x+2y+5=0$ representa una circunferencia.

$D=-4$, $E=2$ y $F=5$, sustituyendo los valores en $\sqrt{D^2+E^2-4F}$ tenemos:

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{D^2+E^2-4F} = \\
&= \sqrt{(-4)^2+(2)^2-4(5)} \\
&= \sqrt{16+4-20} \\
&= \sqrt{0} \\
&= 0 \quad = \quad 0
\end{aligned}
$$

La circunferencia se reduce a un solo punto.

Ejercicios.

Hallar las ecuaciones de las siguientes circunferencias.

1. $C(0,0)$ $r=3$
2. $C\left(3,-\frac{1}{2}\right)$ $r=3$
5. $C(2,-3)$ $r=5$
6. $C\left(-\frac{1}{2},4\right)$ $r=\frac{3}{2}$

3. $C\left(-\frac{2}{3},-\frac{1}{2}\right)\ r=\frac{2}{3}$

4. $C(-2,0)\ r=2$

7. $C(3,-1)\ r=2\frac{1}{4}$

8. $C(0,5)\ r=5$

Hallar el centro y el radio de las siguientes circunferencias.

1. $x^2+y^2=4$ 2. $x^2+y^2=\frac{9}{16}$ 3. $(x+6)^2+(y+8)^2=25$ 4. $(x-7)^2+(y-3)^2=\frac{4}{49}$ 5. $(x-5)^2+(y-9)^2=\frac{1}{9}$ 6. $(x-3)^2+(y+2)^2=\frac{25}{4}$ 7. $(x-3)^2+(y-1)^2=0$ 8. $x^2+(y-1)^2=-2$	9. $(x+4)^2+y^2=\frac{1}{4}$ 10. $x^2+y^2+8y=0$ 11. $x^2+y^2+6x-2y-2=0$ 12. $x^2+y^2-6x-8y+9=0$ 13. $x^2+y^2+8x-4y+11=0$ 14. $2x^2+2y^2+8x-6y+7=0$ 15. $9x^2+9y^2-36x-54y+118=0$ 16. $4x^2+4y^2-16x+24y+27=0$ 17. $4x^2+4y^2-4x-24y+33=0$

Unidad IV

PARÁBOLA

Introducción.

Las secciones cónicas son curvas que pueden obtenerse de la intersección de un plano con un cono circular recto. La intersección del cono con un plano perpendicular a su eje se conoce como circunferencia. Si el plano se inclina ligeramente, la curva resultante es una elipse. Si el plano interseca ambas mitades, o ramas del cono, la curva es una hipérbola. Finalmente cuando el plano es paralelo a una recta sobre el cono, la curva de la intersección es una parábola.

La geometría analítica en ocasiones se considera el estudio particularizado de las tres grandes curvas: Parábola, Elipse e Hipérbola. Esto se debe a Menecmo (Siglo lV A. C.) a quien se le atribuye la invención de dichas curvas. Menecmo descubrió la parábola intento por encontrar la arista de un cubo cuyo volumen sea el doble del cubo dado (duplicación del cubo) solo con regla y compás, que después se comprobó que es imposible resolver.

Posterior a Menecmo, Arquímedes amplió el campo de estudio de estas tres curvas. Apolonio de Perga por su parte, concibió las secciones cónicas como resultado de la intersección de un plano con un cono circular ya sea rectangular o no. Si el plano es paralelo a un elemento y a la intersección se extiende indefinidamente a lo largo de una parte del cono sin cortar a la otra, entonces se forma una parábola. No se conoce como pudo haber llevado las secciones cónicas a un plano.

Kepler, siglos después (1609) señaló detalles de la teoría abstracta que Apolonio había pasado por alto, como la existencia de un foco para la parábola.

Fue Fermat, años después (1601 – 1666), contemporáneo de Descartes, quien utilizando la notación de Viete, demuestra en su breve tratado titulado "Ad Locos Planos et Sólidos Isagoge" (Introducción a los lugares geométricos planos y sólidos), que la parábola como lugar geométrico se puede expresar por la ecuación $\mathbf{a^2 \pm x^2 = b\,y}$ y que $\mathbf{y = x^n}$ si **n** es positivo representa una parábola y si es negativo representa una hipérbola en su tratado titulado " Método para hallar máximos y mínimos "

Isaac Newton (1642 – 1727), hizo estudios y descubrimientos de gran trascendencia; cabe mencionar que describió el tiro parabólico, llamado así porque en este movimiento se describe una parábola.

La parábola tiene diversas aplicaciones, pues tiene propiedades notables: si se dispone de un manantial de luz en su foco, con un espejo parabólico los rayos son reflejados en forma de un haz de luz o bien, si el espejo recibe hondas electromagnéticas las refleja concentradas en el foco. Estas propiedades se emplean en la construcción de faros de automóviles y en las antenas parabólicas.

Definición

Es el conjunto de los puntos que están a la misma distancia de una recta fija, llamada directriz, y de un punto fijo del plano que no pertenece a la recta y se llama foco

Geométricamente se describe como la curva que resulta al interceptar un cono recto circular y un plano paralelo a la generatriz del cono.

Elementos fundamentales de la parábola.

Eje de la parábola: Es la recta que pasa por el foco y por el punto de la parábola llamado vértice. La posición del eje determina la posición de la parábola; hay parábolas horizontales, verticales o inclinadas, según que el eje sea horizontal, vertical o inclinado. La parábola siempre es simétrica con respecto a su propio eje. (EE´)

Directriz: Recta perpendicular al eje de la parábola y está a la misma distancia del vértice que el vértice del foco. (DD´)

Lado recto: Recta que une dos puntos de la parábola, que pasa por el foco y es perpendicular al eje de la parábola. (LR)

Radio focal: Distancia que hay entre el foco de una parábola y cualquier punto de la misma.

Vértice: Punto medio del segmento AF

Cuerda: Segmento de dos puntos cualesquiera de la parábola (CC´)

Cuerda focal: Cuerda que pasa por el foco (BB´)

Ecuación de una parábola.

Ahora deducimos la ecuación de una parábola con foco F (0, p) y la directriz $y = -p$, donde $p > 0$. Entonces vemos que el eje de la parábola está a lo largo del eje y, como lo muestra la figura. El origen es necesariamente el vértice, puesto que está situado en al eje a p unidades tanto del foco como de la directriz. Si el punto P(x, y) es un punto sobre la parábola, entonces la distancia de P a la directriz es:

$d_1 = y - (- p) = y + p$ ecuación 1

Usando la fórmula de distancia, encontramos la fórmula de P al foco:

$d_1 \;=\; d\,(P, F) = \sqrt{(x-0)^2 + (y-p)^2}$ ecuación 2

Igualando la ecuación 1 y la ecuación 2, tenemos que:

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-p)^2} \;=\; y + p$$

Elevando al cuadrado ambos lados y simplificando, obtenemos:

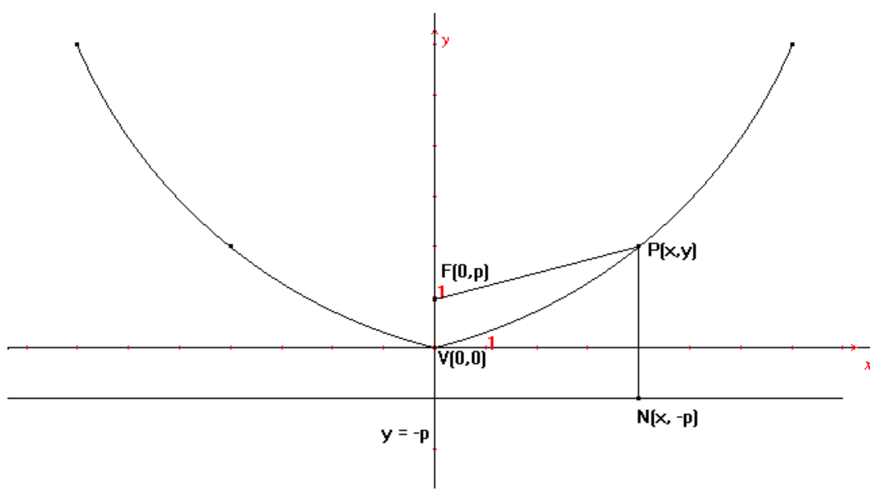
$$x^2 + (y-p)^2 \;=\; (y+p)^2$$

$$x^2 + y^2 - 2py + p^2 = y^2 + 2py + p^2$$

$$x^2 = 4py$$

Esta ecuación se refiere a la ecuación en forma estándar de la parábola con foco (0, p) y directriz y = - p para p > 0

Ecuación de la parábola $x^2 = 4py$



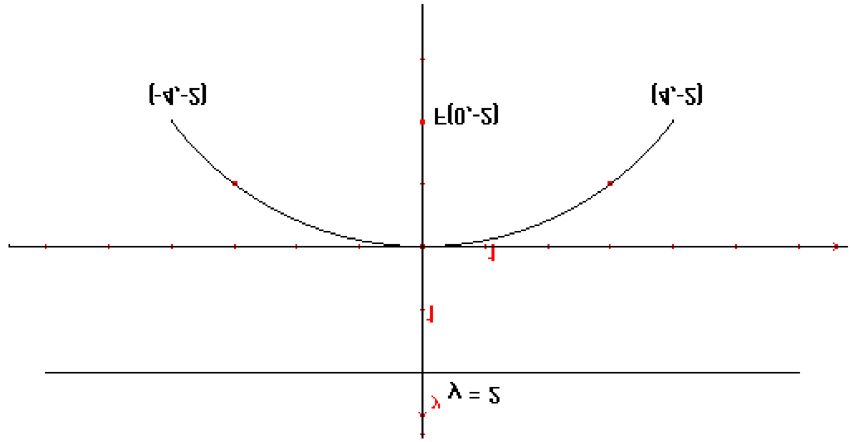
Formas estándar para parábolas con vértice en el origen .

Ecuación cartesiana	Vértice	Eje	Foco	Lado Recto	Directriz	La parábola se abre hacia
$X^2 = 4py$	(0 , 0)	X = 0	(0 , p)	4p	Y = - p	Hacia arriba si p>0

$X^2 = -4py$						Hacia abajo si p<0
$Y^2 = 4px$	(0 , 0)	Y = 0	(p , 0)	4p	X = - p	Hacia la derecha si p>0
$Y^2 = -4px$						Hacia la izquierda si p<0

Ejemplo

Encuentre la ecuación en forma estándar de la parábola con directriz $y = 2$ y foco $(0 , -2)$. Grafique la parábola.



En la figura se ha trazado la gráfica con directriz $y = 2$ y foco en el punto (0, -2).

Vemos que la ecuación es de la forma: $x^2 = 4py$

Puesto que $p = -2$, y comparando con la tabla anterior la parábola abre hacia abajo y la ecuación debe ser :
$x^2 = 4(-2)y$ o $x^2 = -8y$

Para hacer la gráfica de la parábola, primero marcamos el vértice en (0, 0), el foco y luego la directriz que está a la misma distancia que del vértice al foco; es decir $y = 2$, entonces:

$X^2 = -8(-2) = 16$ o $x = \pm 4$

Así obtenemos el valor de x que es ± 4. Ubicamos los puntos sobre el eje de las “x” y a la altura del foco, marcamos los puntos (4, -2) y (-4 , -2) que están situados sobre la parábola.

Ejemplo: Encuentre el foco, el vértice, la directriz y el eje de la parábola $y^2 = -6x$. Haga la gráfica e indique el foco y la directriz.

La ecuación tiene la forma $y^2 = 4px$. Así el vértice está en el origen, el eje focal es x, y el dato de p lo obtenemos de la siguiente manera: $4p = -6$, o $p = -3/2$

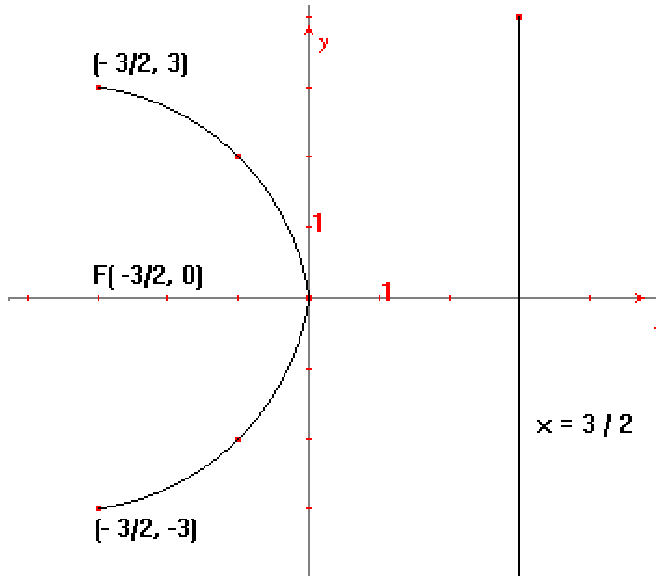
Observa en la tabla anterior que p<0, por la tanto, la parábola se abre hacia la izquierda, el foco es (-3 / 2 , 0), y la directriz es $x = 3/2$.

Para hacer la gráfica de la parábola, consideramos a $x = -3/2$. Entonces:

$y^2 = -6(-3/2) = 9$ o $Y = \pm 3$

Así, los puntos (-3 / 2 , ± 3) están colocados sobre la parábola, como se muestra en la figura.

Ecuación de la parábola $y^2 = -6x$



Ejemplo: Escribir la ecuación de la parábola con foco en (0, 5) y directriz y = - 5. Hacer su grafica. Como el foco está sobre el eje Y en (0, 5), entonces es una parábola vertical con las ramas hacia arriba y vértice en (0, 0) por lo que su ecuación es de la forma $x^2 = 4py$. Por definición, p es la distancia del vértice a l foco, entonces p = 5, sustituyendo este valor en $x^2 = 4py$ tenemos lo siguiente:

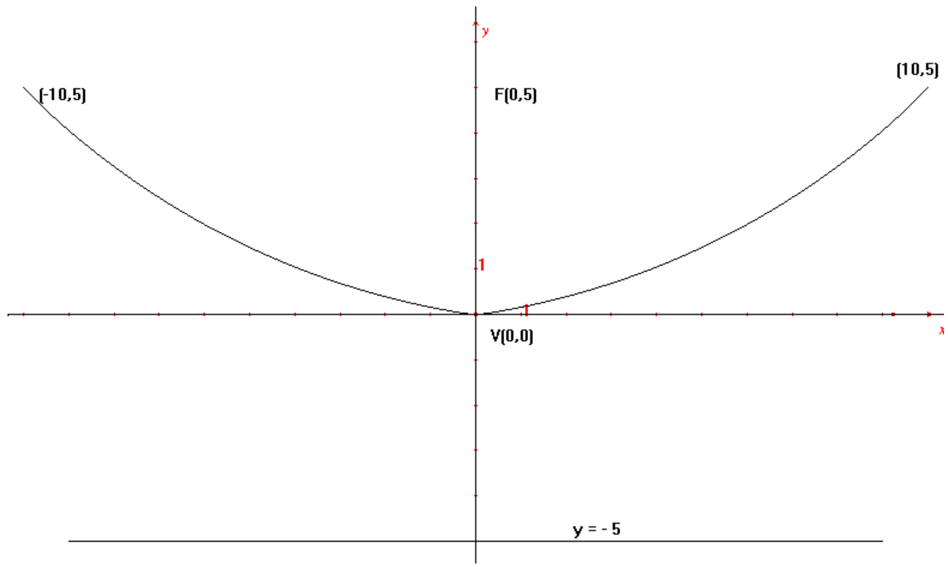
$$X^2 = 4\,py$$

$$X^2 = 4(5)y$$

$$X^2 = 20y$$

Por lo tanto, la ecuación de la parábola con foco en (0 , 5) y directriz $y = -5$ es $x^2 = 20y$. Para hacer la gráfica, tabulamos algunos puntos; en este caso conviene darle valores a la y y encontrar los correspondientes valores de la x.

Es decir; si $y = 5$, entonces $x^2 = 20(5) = 100$ o $x = \pm 10$



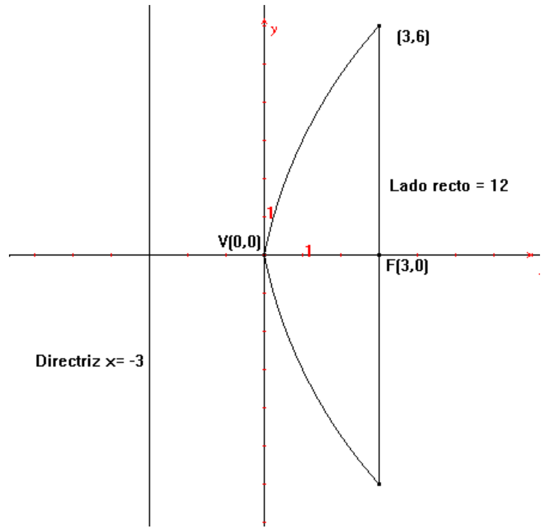
Ejemplo: Una parábola cuyo vértice está en el origen y cuyo eje coincide con el eje “x” pasa por el punto (3,6), determinar la ecuación de la parábola, las coordenadas de su foco, la ecuación de su directriz y la longitud de su lado recto; trazar la gráfica correspondiente. De acuerdo a las condiciones dadas en el problema, tenemos que la ecuación de la parábola es de la forma $y^2 = 4px$; como la curva pasa por el punto (3,6), sus coordenadas deben satisfacer dicha ecuación de la parábola, es decir:

$$y^2 = 4py$$
$$(6)^2 = 4p(3)$$
$$36 = 12p$$
$$p = \frac{36}{12}$$

Si p = 3, la ecuación de la parábola es:

$$y^2 = 4px$$
$$y^2 = 4(3)x$$
$$y^2 = 12x$$

La gráfica es la siguiente:



Ejercicios:

Para cada una de las siguientes parábolas con vértice en el origen, hallar las coordenadas del foco, directriz, lado recto y la gráfica.

1. V (0, 0) directriz $y = -5/2$
2. V (0, 0) pasa por el punto P (3, - 2)
3. V (0, 0) lado recto 7 unidades y abre hacia la izquierda.
4. V (0, 0) Foco en (4, 0)

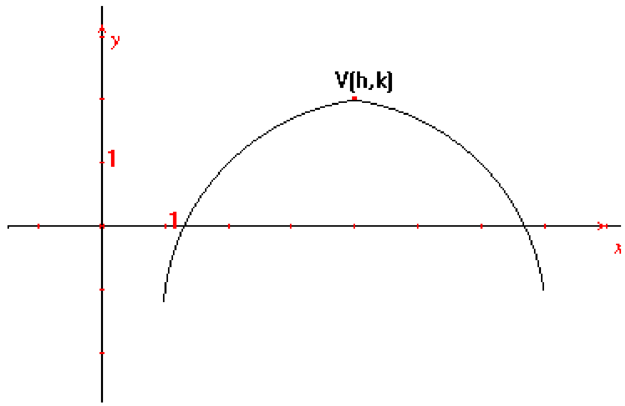
5. V (0, 0) Foco en (0, - 5)

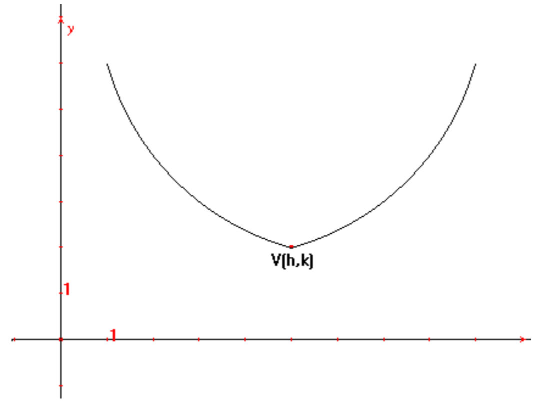
6. V (0, 0)   Directriz x = - 5

Parábola con vértice en (h, k)

Suponga que la parábola se traslada tanto horizontal como verticalmente, de modo que su vértice está en el punto (h, k) y su eje es la recta vertical x = h. La forma estándar de la ecuación de está parábola es:

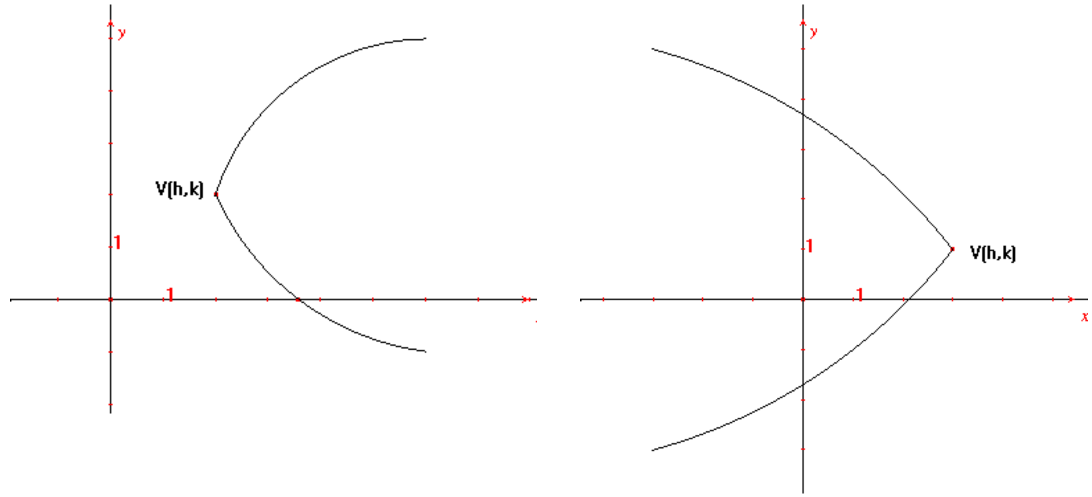
$$(x-k)^2=4p(y-k)$$





De igual manera, la ecuación estándar de una parábola con vértice (h, k) y eje de la recta horizontal y = k es:

$$(x-y)^2=4p(x-h)$$



En la figura anterior ilustramos los cuatro tipos de parábolas que pueden resultar de tomar p positivo o negativo, y el eje ya sea horizontal o vertical.

Formas estándar para parábolas con vértice en el punto (h, k)

Ecuación Ordinaria	Vértice	Eje	Foco	Lado recto	Directriz	La parábola se abre

$(x-h)^2 = 4p(y-k)$	(h, k)	X = h	(h,k+p)	4p	Y = k - p	Hacia arriba si p>0
						Hacia abajo si p<0
(y – k) = 4p (x – k)	(h, K)	Y = k	(h+p,k)	4p	X = h - p	Hacia la derecha si p>0
						Hacia la izquierda si p<0

Ejemplo: Hallar vértice, lado recto, foco, ecuación de la directriz y trazar la parábola cuya ecuación es:

$$x^2 - 4x - 4y - 4 = 0$$

Dejamos del lado izquierdo de la igualdad los términos en x , como se muestra a continuación:

$$x^2 - 4x = 4y + 4$$

Sumamos 4 en ambos miembros de la igualdad, para que del lado izquierdo quede un trinomio cuadrado perfecto, como se muestra a continuación:

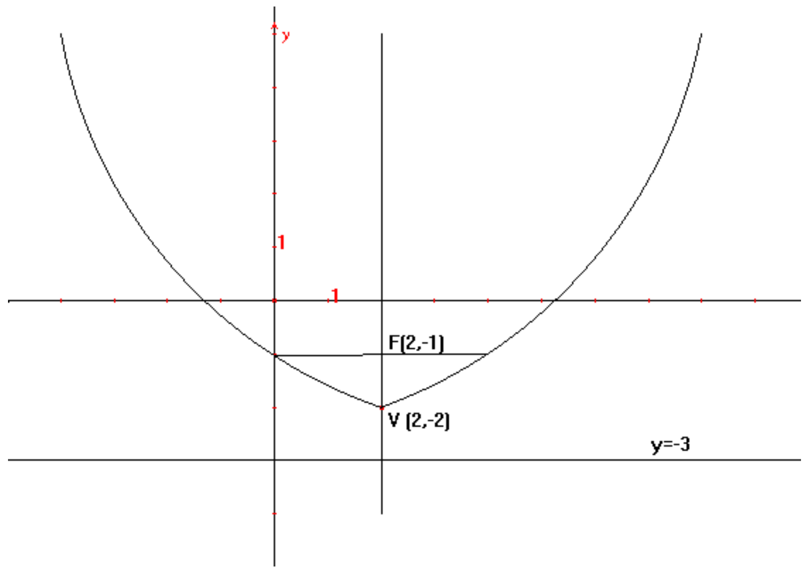
$$x^2 - 4x + 4 = 4y + 4 + 4$$
$$x^2 - 4x + 4 = 4y + 8$$
$$(x-2)^2 = 4\,(y+2)$$

Para obtener el vértice de esta parábola, primero se despeja **x** del primer término y **y**, así nuestros valores son V(2, -2). Ahora como 4p= 4, tenemos que p=1. Si observamos la tabla que se presentó anteriormente la ecuación de la directriz es y = k – p, por lo tanto, **y** tiene un valor de: y = -2 -1 = -3 y las coordenadas del foco son (2, -1). Concentrando los datos en la tabla anterior, obtenemos:

Ecuación ordinaria	Vértice	Eje	Foco	Lado recto	directriz	la parábola se abre hacia arriba ya que p > 0

$(x - 2)^2 = (y + 2)$	(2, -2)	X = 2	(2, -1)	1	Y = -3	

La gráfica es la siguiente:



Ejemplo: Hallar la ecuación de la parábola con vértice en (2,3), eje paralelo al eje de las coordenadas y que pasa por el punto (4,5).

La parábola tiene su eje paralelo al eje de las ordenadas, por lo tanto, su ecuación es de la forma siguiente:

$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$

Las coordenadas del vértice y del punto por el que pasa la parábola deben satisfacer la ecuación, es decir:

$$
\begin{aligned}
& (4-2)^2 = 4p\,(5-3) \\
\textit{de donde}\quad & 2^2 = 4p\,(2) \\
\textit{o sea}\quad & 4 = 8p \\
\textit{es decir}\quad & \frac{1}{2} = p
\end{aligned}
$$

Entonces la ecuación de la parábola es: $(x-2)^2 = 4\left(\frac{1}{2}\right)(y-3)$

O bien: $(x-2)^{2} = 2(y-3)$

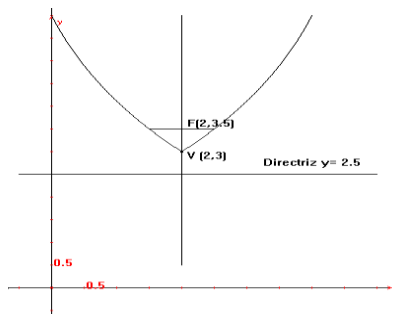
Despejando “x” y “y” de ambos términos, el valor del vértice es (2 , 3). El foco tiene un valor de (2, 3 +0.5), es decir (2, 3.5). La directriz y es igual a: y = 3 – 0.5 = 2.5

Concentramos los resultados en la tabla:

Ecuación ordinaria	Vértice	Eje	Foco	Lado recto	Directriz	La parábola se abre hacia

$(x-2)^2 = 2\ (y-3)$	(2, 3)	X = 2	(2,3.5)	1/2	Y = 2.5	arriba, ya que $p > 0$

La gráfica es la siguiente:



Ejemplo: Hallar el vértice, lado recto, foco ecuación de la directriz y trazar la parábola cuya ecuación es:

$$x^2 - 4x - 4y - 4 = 0$$

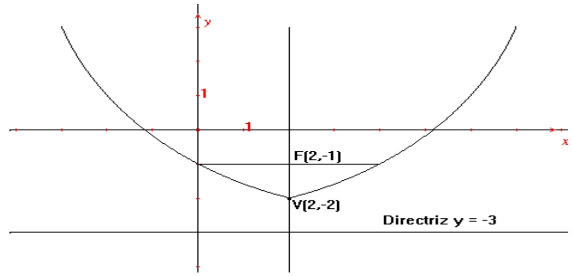
Dejamos de lado izquierdo de la igualdad los términos en X; haciendo esto nos queda:

$$x^2 - 4x = 4y + 4$$
$$x^2 - 4x + 4 = 4y + 4 + 4$$
$$x^2 - 4x + 4 = 4y + 8$$
$$(x-2)^2 = 4\ (y+2)$$

El vértice está en el punto (2, -2), el lado recto es igual a 4. Como 4p = 4, tenemos que p = 1, por lo tanto, la ecuación de la directriz es y = -3 y las coordenadas del foco son (2, -1).

Ecuación Ordinaria	Vértice	Eje	Foco	Lado recto	Directriz	La parábola se abre hacia arriba si p>0
$(x - 2)^2 = 4\ (y + 2)$	(2, -2)	X = 2	(2, -1)	4	Y = - 3	

La gráfica es la siguiente:



Ejemplo: Hallar el vértice, lado recto, foco, ecuación de la directriz y trazar la parábola cuya ecuación es:

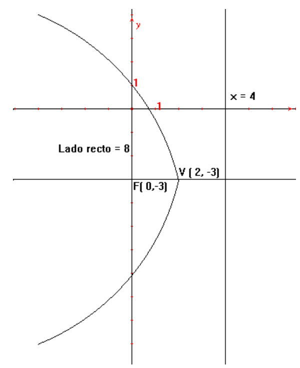
$$y^2 + 6y + 8x - 7 = 0$$
$$y^2 + 6x = -8x + 7$$
$$y^2 + 6y + 9 = -8x + 7 + 9$$
$$(y+3)^2 = -8x + 16$$
$$(y+3)^2 = -8\,(x-2)$$

Como el término del eje x es negativo, las ramas de la parábola se extienden hacia la izquierda.

De la ecuación 4p = - 8,   entonces p = -2.

Ecuación Ordinaria	Vértice	Eje	Foco	Lado recto	Directriz	La parábola se abre hacia la izquierda
$(y+3)^2 = -8\ (x - 2)$	(2, -3)	Y = -3	(2-2, -3) (0 , -3)	8	X = 2 – (-2) X =2 +2 = 4	

La gráfica es la siguiente:



Ejemplo: Encuentre la ecuación de la parábola con vértice en (2, - 3), eje paralelo al eje x, y pasando a través del punto (3,1).

Si usamos la información de la tabla: Formas estándar para parábolas con vértice en el punto (h, k), la ecuación debe ser la siguiente:

$$(y-k)^2 = 4\ p\ (x-h)$$

Puesto que el vértice es (2, -3), concluimos que h = 2 y k = -3. Si el punto (3, 1) está en la gráfica, sus coordenadas deben satisfacer la ecuación, sustituimos tales valores y obtenemos el valor de p.

$$(y+3)^2 = 4\ p\ (x-2)$$

$$(1+3)^2 = 4\ p\ (3-2)$$

$$(\ 4\ )^2 = 4\ p\ (\ 1\ )$$

$$16 = 4p$$

$$p = \frac{16}{4}$$

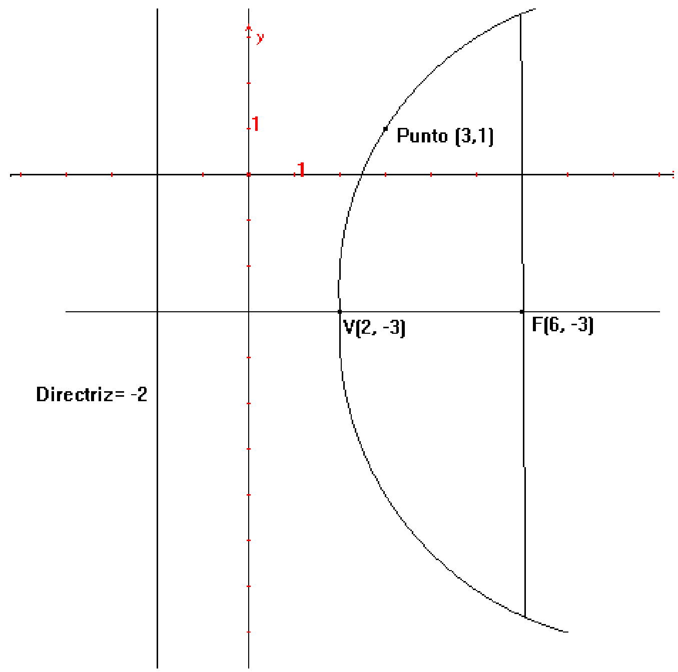
$$p = 4$$

Y por lo tanto, la ecuación de la parábola es:

$$(y+3)^2 = 16\,(x-2)$$

Ecuación ordinaria	Vértice	Eje	Foco	Lado recto	Directriz	
(y +3) = 16 (x – 2)	(2, 3)	y =- 3	(2+4,3) (6,-3)	16	X = 2 – 4 X= -2	La parábola se abre hacia la derecha si p>0

La gráfica se presenta a continuación:



y
1
1
Punto (3,1)
V(2, -3)
F(6, -3)
Directriz= -2

Ejercicios.

Para cada parábola encuentre los elementos faltantes. Haga la gráfica de las ecuaciones.

$$(y+3)^2 = -8(x+2)$$

$$(x-2)^2 + y = 0$$

$$x^2 + 6x + y + 11 = 0$$

$$x^2 - 2x - 4y + 3 = 0$$

$$y^2 - 4y - 4x + 3 = 0$$

$$y^2 - 4y + 6x - 8 = 0$$

Encuentre la ecuación de la parábola que satisfaga las condiciones dadas.

$$Foco\ (0,7) \quad directriz\ \ y=-7$$

$$Foco\ (0,-5) \ \ directriz \quad y=5$$

$$Foco\left(\frac{3}{2},0\right) \quad directriz \quad x+\frac{3}{2}=0$$

$$Foco\ (2,3) \quad directriz \quad y=-3$$

$$Foco\ (1,2) \quad vértice \quad (7,2)$$

$$Vértice\,(5,1) \quad directriz \quad y=7$$

$$Vértice\,(-1,4) \quad directriz \quad x=0$$

Ecuación de la parábola dados tres puntos

Las dos formas de la segunda ecuación ordinaria de la parábola,

$$(x-h)^2 = 4p(y-k) \qquad y \qquad (y-k)^2 = 4p(x-h)$$

contienen tres constantes arbitrarias independientes, que son: h, k y p; de la misma manera, las ecuaciones de la parábola en forma general,

$$x^2 + \frac{D}{A}x + \frac{E}{A}y + \frac{F}{A} = 0 \qquad y \qquad y^2 + \frac{D}{C}x + \frac{E}{C}y + \frac{F}{C} = 0$$

Contienen también tres constantes arbitrarias e independientes, que son:

$\frac{D}{A}, \frac{E}{A}\ y\ \frac{F}{A}$ Para la primera ecuación y

$\frac{D}{C}, \frac{E}{C}\ y\ \frac{F}{C}$ Para la segunda ecuación.

Dadas las ecuaciones anteriores, la ecuación de la parábola en cualquiera de sus formas (segunda ordinaria y general) se obtiene al determinar los valores de las tres constantes respectivas.

Dadas tres condiciones independientes que den lugar a tres ecuaciones independientes, las cuales están en función de las tres constantes arbitrarias y que al resolver el sistema anterior, se demuestra que geométrica y analíticamente la ecuación de la parábola queda perfectamente determinada.

Ejemplo: Determinar la ecuación de la parábola cuyo eje de simetría es paralelo al eje "y" y que pasa por los tres puntos L (-2, 9), M (0, 1) y N (3, 4).

Con base a las condiciones del problema, emplearemos la ecuación de la parábola en su forma general.

$$Ax^2 + Dx + Ey + F = 0$$

de donde se reduce a: $$x^2 + \frac{D}{A}x + \frac{E}{A}y + \frac{F}{A} = 0$$

se igualan los siguientes términos:

$$D' = \frac{D}{A}, \quad E' = \frac{E}{A} \quad y \quad F = \frac{F}{A}$$

Por lo tanto, la ecuación se puede expresar en la forma $x^2 + D'x + E'y + F' = 0,$ en donde las tres condiciones por determinar son: D’, E’ y F’.

Como los tres puntos dados pertenecen a la parábola, sus coordenadas deben satisfacer la ecuación $x^2 + D'x + Ey + F = 0$

Al aplicar la conclusión anterior, obtenemos las tres ecuaciones siguientes correspondientes a los puntos dados:

$$x^2 + D'x + E'y + F' = 0$$

Para L (-2, 9)

$$(-2)^2 + D'(-2) + E\,46\,(9) + F' = 0$$

$$\therefore \quad -2D' + 9E' + F' = -4 \qquad ecuación \quad 1$$

$$x^2 + D'x + E'y + F' = 0$$

Para M (0, 1)

$$(0)^2 + D'(0) + E(1) + F' = 0$$

$$\therefore \quad E' + F' = 0 \qquad ecuación \quad 2$$

$$x^2 + D'x + E'y + F' = 0$$

$$(3)^2 + D'(3) + E'(4) + F' = 0$$

Para N (3, 4)

$$9 + 3D' + 4E' + F' = 0$$

$$\therefore \quad 3D' + 4E' + F' = -9 \qquad ecuación \quad 3$$

Si resolvemos por suma o resta las ecuaciones 1 y 3, obtenemos:

Si la ecuación 1 se multiplica por 3 y la ecuación 3 se multiplica por 2 resulta:

$$3\,(-2\,D' + 9\,E' + F' = -4\,)$$

$$2\,(\,3\,D' + 4\,E' + F' = -9\,)$$

$$-\cancel{6}D' + 27E' + 3F' = -12$$

$$6D + 8E' + 2F' = -18$$

De las ecuaciones anteriores obtenemos la cuarta ecuación:

$$35\,E' + 5F' = -30 \qquad \text{Ecuación } 4$$

Si se aplica el mismo método a la ecuaciones 2 y 4, obtenemos:

Si la ecuación 2 se multiplica por –35, resulta:

$$-35\,(E' + F' = 0)$$

$$\begin{array}{rcl} -\cancel{35}\,E' - 35\,F' & = & 0 \\ 35\,E' + 5F' & = & -30 \\ \hline -30\,F' & = & -30 \end{array}$$

$$\therefore F' = \frac{-30}{-30} = 1$$

Al sustituir el valor de F’ en la ecuación 2, resulta:

$$E' + F' = 0$$

$$E' + 1 = 0$$

$$\therefore E' = -1$$

al sustituir los valores de E' y F' en la ecuación 3, resulta:

$3D' + 4E' + F' = -9$

$3D' + 4(-1) + 1 = -9$

$3D' - 4 + 1 = -9$

$3D' - 3 = -9$

$3D' = -9 + 3$

$$D' = \frac{-6}{3} \qquad \therefore D' = -2$$

Si se sustituyen los valores de las constantes D', E' y F', en la ecuación de la parábola en su forma general, resulta:

$x^2 + D'x + Ey + F' = 0$

$x^2 + (-2)x + (-1)y + 1 = 0$

$\therefore x^2 - 2x - y + 1 = 0$ Esta es la ecuación de la parábola en su forma general.

Al transformar la ecuación general de la parábola en su segunda fórmula ordinaria, tenemos:

$$x^2 - 2x - y + 1 = 0$$

Al ordenar los términos, tenemos:

$$x^2 - 2x = 2y - 1$$

Al completar cuadrados en x, tenemos:

$$x^2 - 2x + \left(-\frac{2}{2}\right)^2 = y - 1 + \left(-\frac{2}{2}\right)^2$$

$$x^2 - 2x + 1 = y - 1 + 1$$

Al factorizar, tenemos:

$(x - 1)^2 = y$ Segunda forma ordinaria de la parábola.

De la ecuación anterior, tenemos que las coordenadas del vértice son:

V (1, 0)

De la misma ecuación, tenemos que 4p = 1

Por lo tanto, $p = \frac{1}{4}$

Como p > 0, la parábola se abre hacia arriba.

Las coordenadas del foco son   F (h, k + p).

$$\therefore F\left[1, \quad \left(0 + \frac{1}{4}\right)\right] = \left(1, \frac{1}{4}\right)$$

La ecuación de la directriz es:

y = k - p

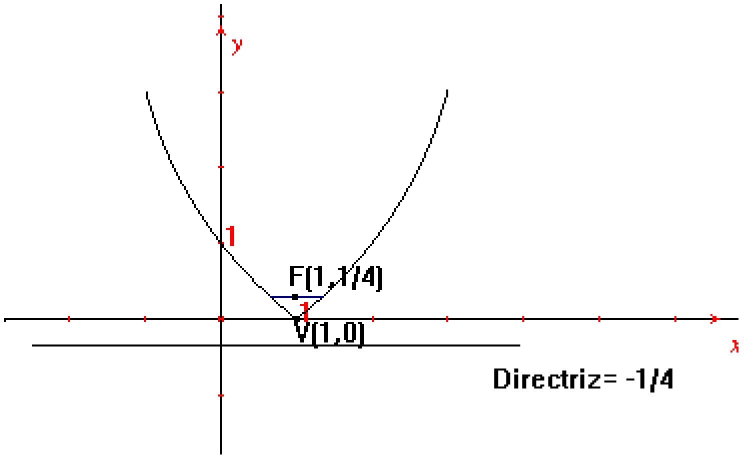
$$\therefore y = 0 - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$$

Como el vértice V(1,0) y el foco F $\left(1, \frac{1}{4}\right)$ están sobre el eje de simetría de la parábola, al ser éste paralelo al eje y, tenemos que la ecuación es: x = h o x = 1.

La longitud del lado recto es: L.R.= $|4p|$

$$\text{L.R.} = \left|4\left(\frac{1}{4}\right)\right| = 1$$

La gráfica se muestra a continuación.



Ejercicios:

1. Encontrar las ecuaciones de las parábolas horizontales que pasan por los puntos:

(-2, 4), (-3, 2) y (2,-4).

(-1, 1), (-1, -1) y (-5, 0)

(1, 0), (-19, -2) y (-14, 3)

Encontrar el vértice, lado recto, foco, la ecuación de la directriz y la gráfica.

2. Encontrar las ecuaciones de la parábola vertical que pasa por los puntos:

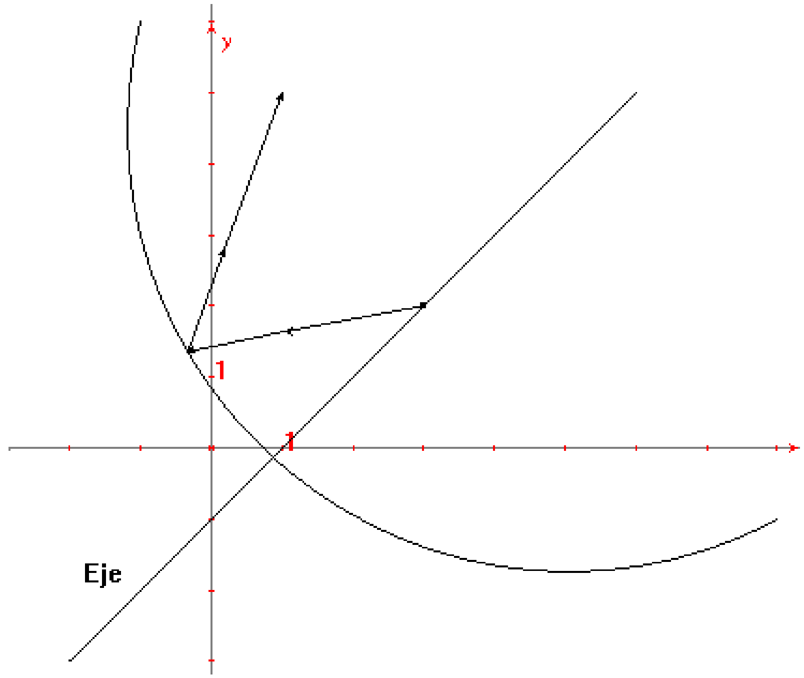
   (1, 0), (-3, 28), (2, 3)

   (-1, 0), (- 2, -5), (3, 0)

Así como el vértice, lado recto, foco, la ecuación de la directriz y la gráfica.

Aplicaciones de la parábola.

La parábola tiene muchas propiedades interesantes que la hacen apropiada para ciertas aplicaciones. El diseño de espejos para telescopios y ciertos sistemas de alumbrado se basan en un propiedad de reflexión importante de las parábolas. En la siguiente figura se observa como un rayo de luz de un punto fuente localizado en el foco de una parábola será reflejado a lo largo de una recta paralela al eje.



Así, la forma de la superficie reflejarte en la mayoría de los reflectores, los faros delanteros del automóvil y las luces intermitentes se obtienen rotando la parábola alrededor de su eje. La fuente de luz se coloca en el foco. Entonces, teóricamente, el resultado de este diseño es un rayo de luz paralelo al eje.

Por supuesto, en realidad ocurrirá alguna dispersión de luz, puesto que no hay un punto de fuente de luz.

Por el contrario, si un rayo de luz que entra es paralelo al eje de una parábola, será reflejado a lo largo de una recta que pase a través del foco. Telescopios reflexivos, platos de satélite y antenas de radar utilizan esta propiedad colocando la lente del telescopio y el equipo receptor para la antena en el foco de un reflector parabólico.

Ejemplos: Una antena parabólica tiene un diámetro de un metro. Si tiene una profundidad de 20 cm., ¿a qué altura debemos colocar el receptor?, es decir, ¿a qué distancia está el foco del vértice?

Colocamos los ejes cartesianos de manera que el vértice de la parábola esté en el origen y su eje coincida con el eje y. Entonces, la ecuación es:

$$X^2 = 4py$$

Debemos determinar el valor de p, que es la distancia del foco al vértice.

Como el diámetro de la antena es un metro y ésta tiene una profundidad de 20 cm., entonces, los puntos (0.5, 0.2) Y (-0.5, 0.2) están en la parábola, Sustituimos (0.5, 0.2) en la ecuación de la parábola y despejamos p.

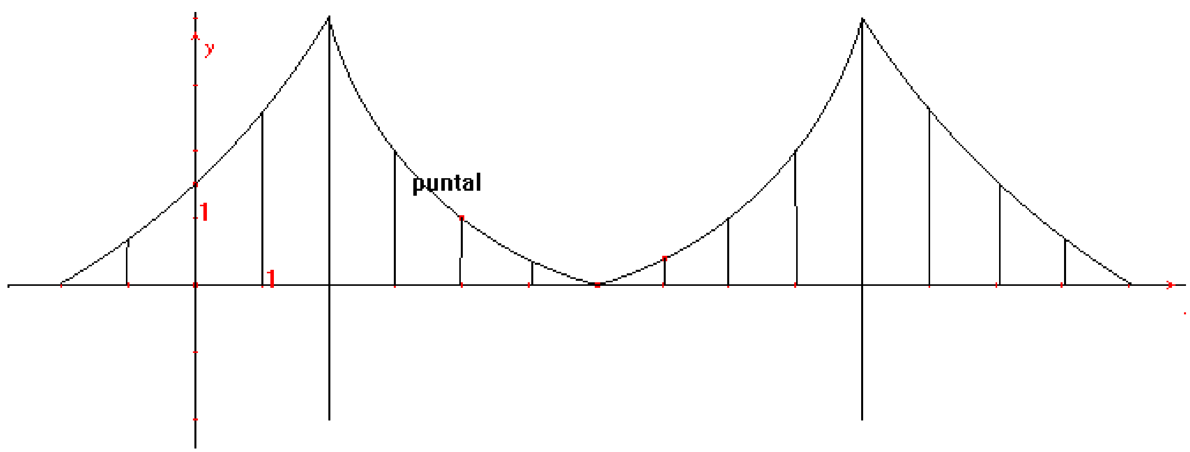
$$(0.5)^2 = 4p\,(0.2)$$

$$0.25 = 0.8\,p$$

$$p = 0.3125$$

Por lo que las coordenadas del foco son F(0, 0.3125), así que debemos colocar el receptor a una altura de 31.25 cm sobre el vértice.

La aplicación de las parábolas también se puede realizar en los puentes colgantes, por ejemplo, si un cable carga peso homogéneo mucho mayor que el peso del propio cable, éste toma la forma de una parábola. Esta propiedad se utiliza en los puentes colgantes, como el Golden Gate, en la bahía de San Francisco, en Estados Unidos. Tal como se muestra en la figura.



Si las torres de un puente colgante tienen una separación de 400 metros y los cables están atados a ellas a 200 metros arriba del piso del puente, ¿ qué longitud debe tener el puntal que está a 50 metros de la torre?. Supongamos que el cable toca el piso en el punto medio V del puente.

Escogiendo el sistema de coordenadas como la sugiere la figura anterior, tenemos que la ecuación de la parábola es $x^2 = 4py$. Debemos encontrar p. Como el punto (200, 200) está en la parábola, resolvemos:

$$200^2 = 4p(200)$$

Obteniendo p = 50. Así, la ecuación de la parábola es:

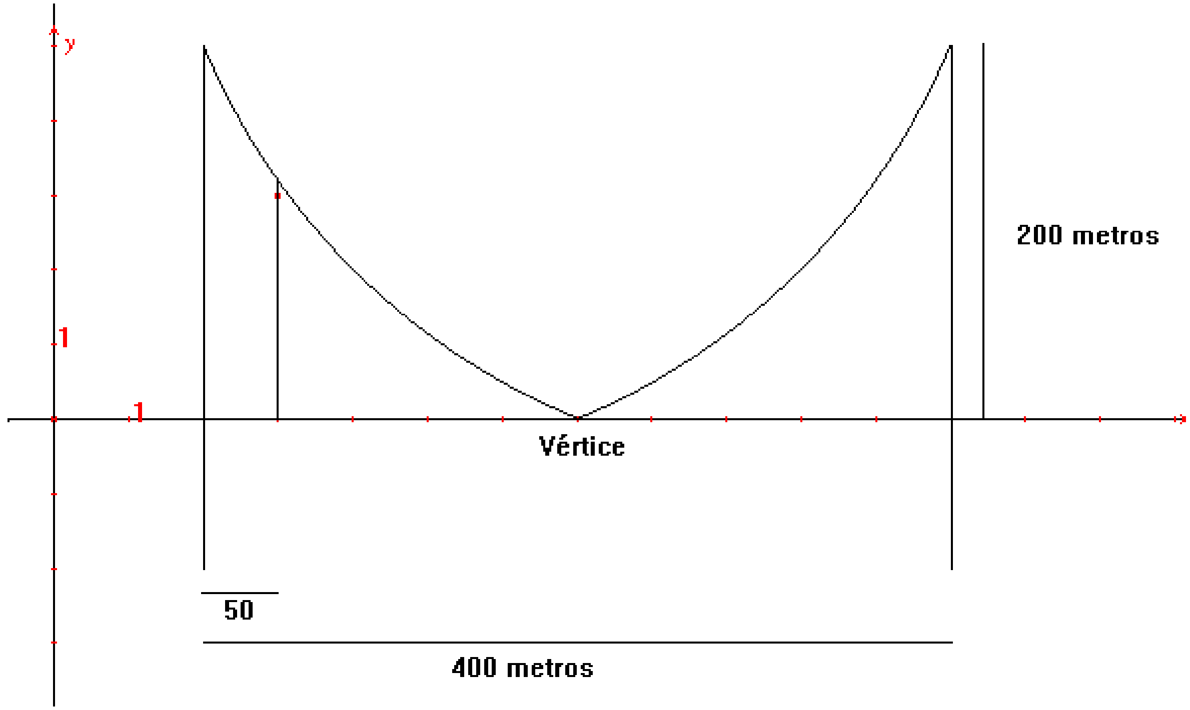
$$x^2 = 200y$$

Queremos encontrar ahora la segunda coordenada del punto de la parábola cuya primera coordenada es $x = -150$.

Resolvemos $(-150)^2 = 200y$

Obteniendo $$y = \frac{225}{2} = 112.5$$

Así, la altura del puntal que está a 50 metros de la torre es de 112.5 metros.



Ejercicios:

Un puente tienen una longitud de 160 metros. El cable que lo soporta tiene la forma de una parábola. Si el puntal en cada uno de los extremos tiene una altura de 25 metros, ¿cuál es la ecuación de la parábola?

En un puente colgante la distancia entre sus torres es de 300 metros y la altura de las torres es de 100 metros. Describe la ecuación del cable que soporta el puente.

Utilizando los datos del problema anterior, encuentra la altura del puntal que se encuentra a 50 metros del centro del puente.

Un diseñador de automóviles desea construir un faro que tenga 16 centímetros de diámetro. La bombilla que va a utilizar en él tiene el filamento de 2 centímetros del cuello. ¿Qué profundidad debe tener el faro para que el filamento quede en el foco del faro si el cuello de la bombilla se coloca a la altura del vértice del faro.

La antena de un radiotelescopio en forma de paraboloide tiene un diámetro de 8 metros. Si la profundidad de la antena es de 0.5 metros, ¿a qué distancia del vértice debe colocarse el receptor.

Unidad V

ELIPSE

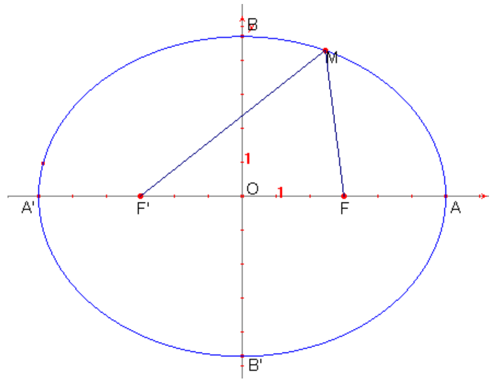
Definición.

Es el lugar geométrico de todos los puntos del plano, tales que la suma de las distancias de cada uno de ellos a dos puntos fijos (F_1 y F_2) llamados focos, es constante.

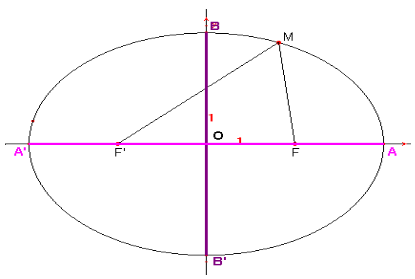
Si **M** es un punto móvil de la curva, **F** y **F'** los focos, se cumple la condición:

MF + MF' = constante

Es decir, que si el punto **M** se mueve a lo largo de toda la curva

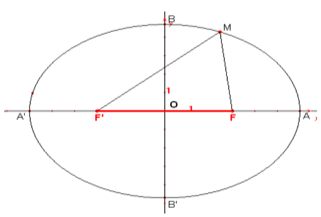


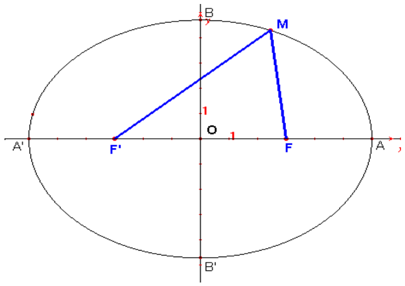
En la figura AA' Y BB' son los ejes de simetría de la elipse y **O** su centro de simetría



AA' es el eje mayor, diámetro mayor o eje focal y se representa por **2a**.

BB' es el eje menor, diámetro menor o eje no focal y se representa por **2b**.





MF y MF' se llaman radios vectores o simplemente vectores.

Construcción geométrica de la elipse.

Existen dos métodos sencillos para el trazo de una elipse, los cuales son:

Método del jardinero

1. Trazar un plano cartesiano.

2. Identificar eje "x" (abscisa) y "y" (ordenada).

3. En el eje de las ordenadas se marcará dos puntos cualesquiera (considerando la misma distancia para los positivos (+) y negativos (-).

4. Utilizando el cordón mayor a 10 cm, el cual tendrá sujetado en uno de sus extremos un lápiz y en el otro servirá de apoyo en el punto asignado en el eje Y (primero los positivos y después los negativos).

5. Se trazará el arco del eje de las abscisas positivas (X) al eje de las ordenadas positivas (Y) y de aquí al eje de las abscisas negativas (X).

6. De la misma manera se traza para el lado opuesto, obteniendo el lugar geométrico (elipse).

Método del escantillón

1. Trazar un plano cartesiano en donde el eje de las abscisas (X) será el eje mayor (A, B).

2. En el eje de las ordenadas (Y) será el eje menor (C, D) y el punto de intersección de ambos ejes será el centro de la elipse (O).

3. Cortar una tira de papel de 20 cm de largo por 4 cm de ancho.

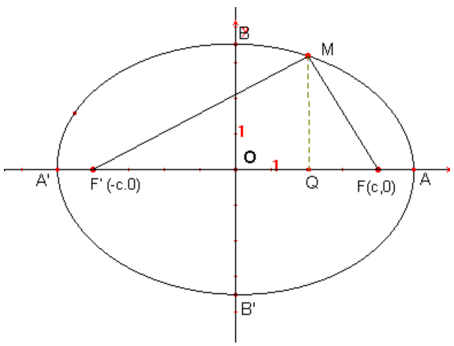
4. Marcar en la tira de papel el eje mayor y el eje menor, partiendo del centro. Colocando el #3 para el eje menor y el #2 para el eje mayor. El #1 se marcará colocando el #2 en el centro del eje menor al punto ***C***.

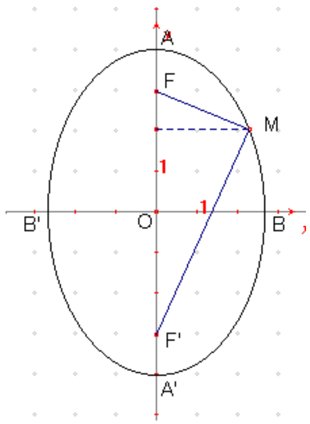
5. Para trazar la elipse se colocará la tira de papel de tal forma que el punto dos coincida con el eje de las abscisas positivas y el punto tres coincida con el eje de las ordenadas negativas.

6. Marcando en el punto 1 la distancia obtenida, girando la tira de papel del centro C al punto B.

7. Repetir el mismo procedimiento para los puntos C a A.

8. Invirtiendo la tira de papel para los puntos A, D y D, B.





Ecuación de la elipse con centro en el origen y eje focal coincidente con el eje coordenado xx'.

Ecuación de la elipse con centro en el origen y eje focal coincidente con el eje coordenado yy'.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$$

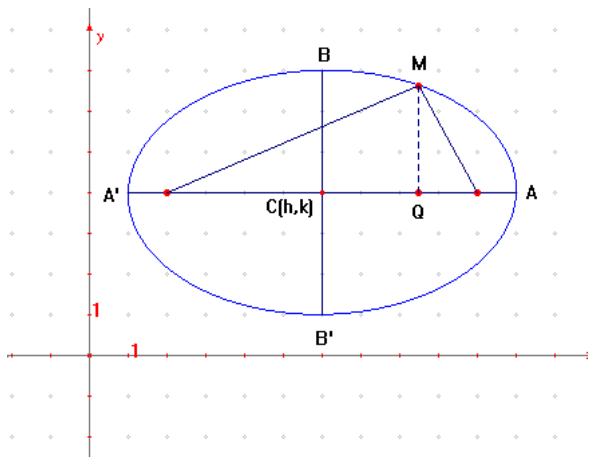
Donde:

a: representa el valor numérico del eje mayor (abscisas) positivas y negativas.

b: representa la mitad de la longitud del eje menor (ordenadas).

x y **y:** ejes coordenados del plano cartesiano.

Ecuación de la elipse con centro no coincidente con el origen y eje focal paralelo al eje xx’.

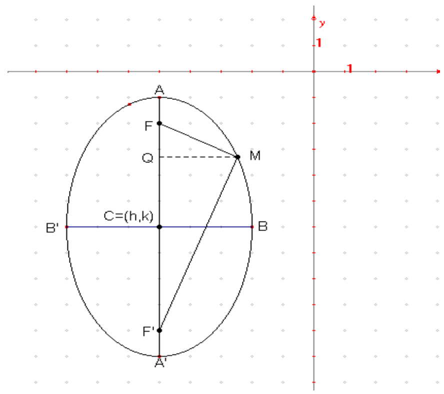


$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

Como se observa en la figura cuando el centro de la elipse se encuentra fuera del origen del plano cartesiano sus coordenadas son (h,k).

$$\frac{(y-h)^2}{a^2}+\frac{(x-k)^2}{b^2}=1$$

Ecuación de la elipse con centro NO coincidente con el origen y eje focal paralelo al eje xx’.



Elipse cuyo centro tiene por coordenadas (h, k) y eje focal paralelo al eje coordenado yy’.

Ejemplo: Obtener la ecuación ordinaria de la elipse con C(3,2), eje mayor paralelo al eje “x” , 2a=4 y 2b=3.

Solución.

Como el eje mayor de la elipse es paralelo al eje “x” la ecuación ordinaria es:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

Para obtener el valor de a y b únicamente despejamos.

$$a=\frac{4}{2}=2 \qquad b=\frac{3}{2} \qquad C(3,2)$$

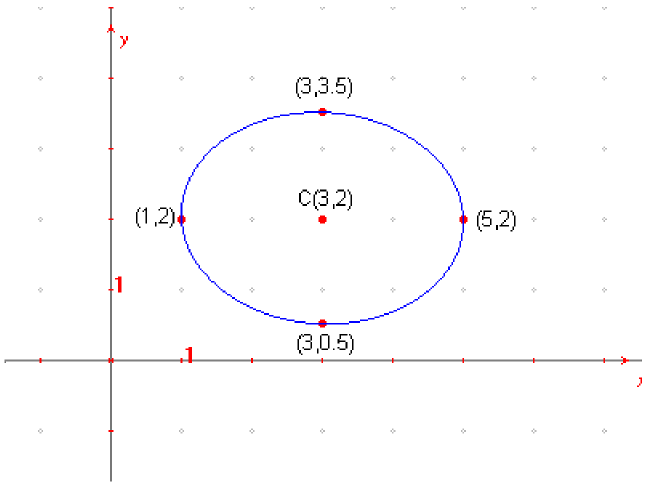
Sustituyendo:

$$\frac{(x-3)^2}{(2)^2}+\frac{(y-2)^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2}=1$$

Realizando operaciones:

$$\frac{(x-3)^2}{4}+\frac{(y-2)^2}{\frac{9}{4}}=1$$

Gráfica de la ecuación



Despejando “y” tenemos:

$$y = \pm\sqrt{\frac{9}{4}\left(1-\frac{(x-3)^2}{4}\right)} + 2$$

Ejemplo: Hallar la ecuación ordinaria de la elipse con A (6,0), A’(-6,0), 2b= 10.

Solución. Si gráficas los puntos AA’ en el plano cartesiano observa que el eje mayor se encuentra en el eje “x” por los que su valor es 2a =12 y centro en el origen C (0,0), por lo que se deduce que la ecuación buscada es de la forma:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Obtenemos el valor de a y b.

$$a = \frac{12}{2} = 6 \; ; \qquad b = \frac{10}{2} = 5$$

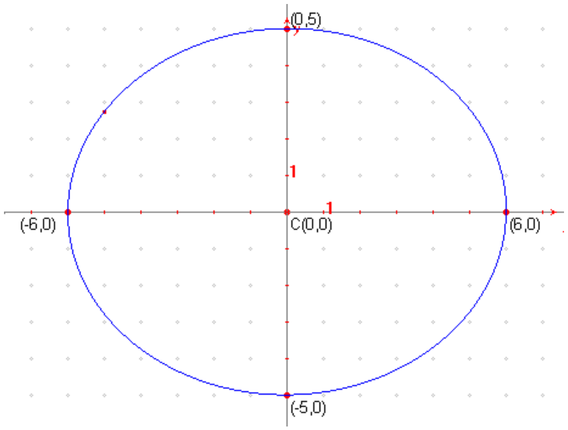
Sustituyendo tenemos:

$$\frac{x^2}{6^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1$$

Realizando operaciones:

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{25} = 1$$

Gráfica de la ecuación:



Despejando “y” para graficar tenemos:

$$y = \pm\sqrt{\frac{900 - 25x^2}{36}}$$

Tabulando y dando valores a

Ejemplo. Obtener la ecuación de la elipse con los datos siguientes: A(0,8), A’(0,8), F(0,6).

Solución. Si graficamos los datos en el plano cartesiano observamos que el eje mayor AA’ se encuentra en el eje “y” y el centro de la elipse en el origen del plano cartesiano, por lo que se deduce que la ecuación buscada es de la forma:

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Obtenemos el valor de a.

$$2a = \overline{AA'} = 16$$
$$a = \frac{16}{2}$$
$$a = 8$$

Obtenemos el valor de b con Pitágoras.

$$c = \overline{OF} = 6$$

$$b = \sqrt{64 - 36} = \sqrt{28}$$

Sustituyendo el valor de a y b:

$$\frac{y^2}{8^2} + \frac{x^2}{\left(\sqrt{28}\right)^2} = 1$$

$$\frac{y^2}{64} + \frac{x^2}{28} = 1$$

Ecuación ordinaria de la elipse.

Ecuación general de la elipse.

Para obtener la ecuación general de la elipse desarrollamos la ecuación ordinaria, por ejemplo si la ecuación de la elipse es:

$$\frac{y^2}{64} + \frac{x^2}{28} = 1$$

o sea:

$$28\ y^2 + 64\ x^2 = (64)(28)$$

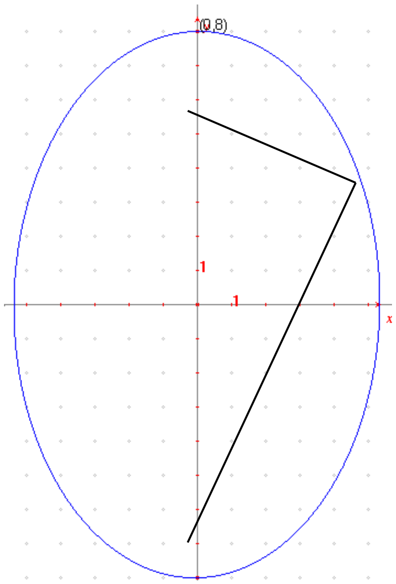
$$64x^2 + 28\ y^2 = 1792$$

$$16\ x^2 + 7\ y^2 = 448$$

$$16\ x^2 + 7\ y^2 - 448 = 0$$

Representación gráfica de la ecuación.

$64x^2 + 28\ y^2 = 1792 \qquad y = \sqrt{\underline{\ 1792 - 64\ x^2}}$



Verifica en la figura anterior si los elementos son los correctos e identifica con colores cada uno de ellos.

Familia de Elipses

Una familia de elipses es un conjunto de ellas que satisfacen cierta condición.

Ejemplo: Encontrar la ecuación de la familia de elipses cuyo eje no focal es la recta con ecuación $x = 8$, diámetro mayor = 6 y diámetro menor = 2

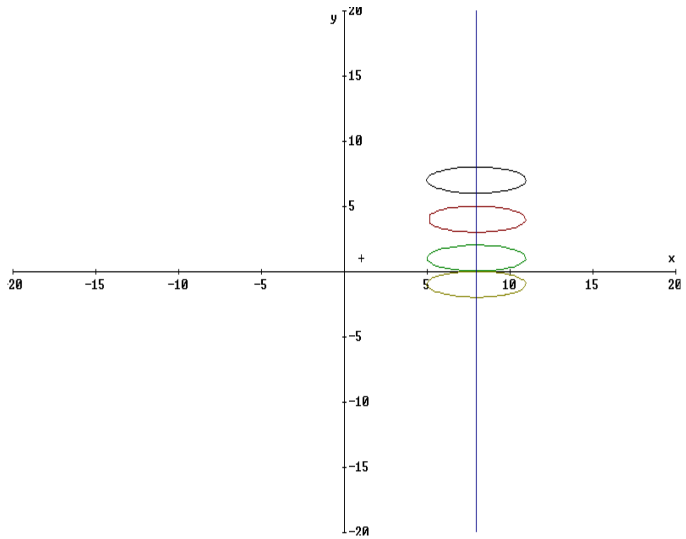
Solución:

Todas las elipses de la familia son horizontales, ya que el eje no focal es vertical. El centro de cualquier elipse de la familia es: C(8,k) para algún valor de k. Puesto que el diámetro mayor es 6, tenemos que $a = 3$ y , como el diámetro menor es 2, entonces $b = 1$

La ecuación de la elipse correspondiente es:

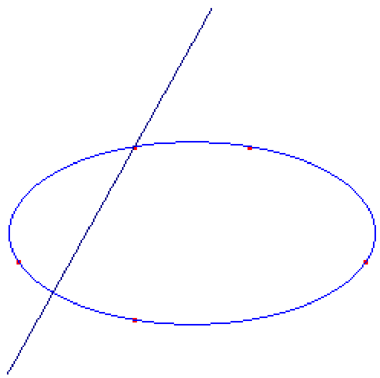
$$\frac{(x-8)}{9} + \frac{(y-k)^2}{1} = 1$$

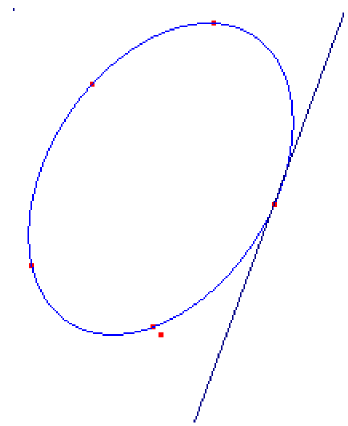
Para representar la familia de elipses, se asignan valores a k = -2, 1, 4, 7



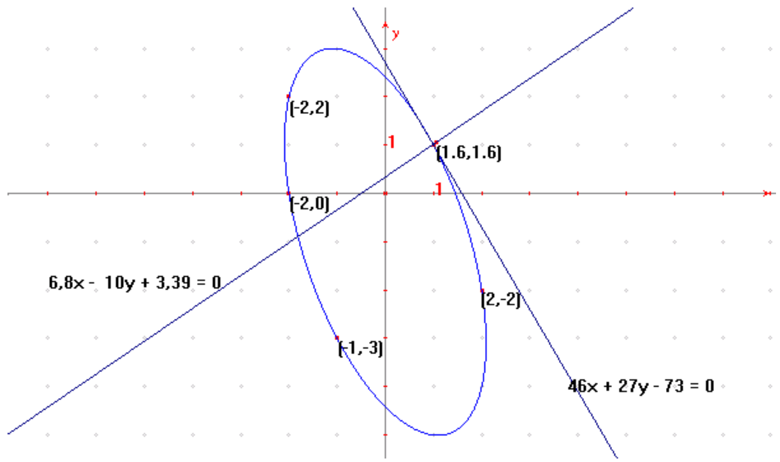
Tangentes y Secantes a la elipse

Dado P, un punto en la elipse, $\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$ la bisectriz del ángulo formado por la recta FP y la recta F’ P que, con excepción de P, contiene solo puntos fuera de la elipse, es la recta tangente a la elipse en el punto P





Ejemplo:


y
1
1
(-2,2)
(1.6,1.6)
(-2,0)
6,8x - 10y + 3,39 = 0
(2,-2)
(-1,-3)
46x + 27y - 73 = 0

Ejercicios:

1. Encuentra la ecuación de la elipse cuyos focos son F(6,0), F' (-6,0) y tal que la suma de las distancias de los puntos de ella a los focos sea 16.

2. Encuentra la familia de elipses cuyos vértices son V(-2,6) y V' (-2,-4)

3. Encuentra la ecuación de la elipse con ejes paralelos a los ejes coordenados y que pasa por los puntos dados: P(5,2), Q(4,5), R(-2,5), S(-2,-1)

4. Dibuja las figuras de los ejercicios anteriores.